設計学基礎

5. 一般設計学

武田 英明

takeda@nii.ac.jp

http://www-kasm.nii.ac.jp/~takeda/

一般設計学

- 吉川弘之氏(元東大総長)提唱
- 設計に関する汎用的知見をえることが目標
- 設計を純数学アプローチ(公理論的集合論)
- 主に静的な設計の理論

基本設定

- 実体に関して形成する知識は**認識**と**分類**から始まる
  - 認識は，その実体の持つ機能や形状などの属性によって分類することで行われる
  - 既知のもののなかで似たものがあれば，それと同じカテゴリーのものだとして分類，記憶される
  - その認識の過程で，実体の持つ機能や属性を抽象して，抽象的特性としてその実体に関する概念を形成することが行われる.

- 新鮮な肉は食べられる
- 腐った肉とコチコチ肉は食べられない
- 新鮮な肉と腐った肉は時間が経つと変化する
- コチコチ肉は時間がたっても，コチコチのまま

実体に関する認識

- 新鮮な肉
  - 食べられるが，時間が経つと腐る
- 腐った肉
  - 食べられない
- コチコチ肉
  - 時間が経っても変わらないが，食べられない

認識された性質

- 食べられる／食べられない
- 腐る
- 時間が経つと変化する
- ・・・

- ？？肉
  - 時間が経っても変わらないが，食べられる

基本設定

- 実体概念：s_1, s_2, …
- 実体概念集合$S=\{s_1, s_2, \ldots\}$

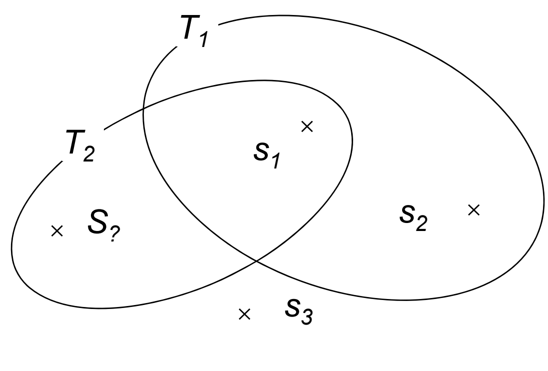
- ここである抽象的属性でSに属する実体を分類することは，集合Sに部分集合系$\boldsymbol{T}$を導入すること
  - 集合系（集合族）とは集合を元とする集合
  - 部分集合系とはある集合の部分集合を元とする集合
- 概念の認識とはこのような部分集合系$\boldsymbol{T}$を形成できること
- 概念の操作能力とはSと$\boldsymbol{T}$で定義される位相空間における集合演算（∩積∪和￢否定）ができること

例

- $T_1=\{x:x$は時間が経つと変化する$\}$
- $T_2=\{x:x$は食べられる$\}$

- $s_1 \in T_1 \cap T_2$:新鮮な肉
- $s_2 \in T_1 \cap \neg T_2$:腐った肉
- $s_3 \in \neg T_1 \cap \neg T_2$:コチコチ肉

- $s \in \neg T_1 \cap T_2$



問題の定式化
実体，属性

- [定義1]　実体集合とは，すべての実体を元とするような集合である．すべての実体とは，存在するもの，存在したもの，存在するであろうものを含む．これを*S'*とする．
- [定義2] 属性とは実体が持っている幾何的，化学的，機械的性質のことである．

機能

- [定義3] ある実体をある状況においたときに発現する属性によって観察される挙動を，人間が特定の意図をもって主観的に観察したときに，発現している人工物の働きを（顕在）機能という．状況が変わることによって異なる機能が現れるが，それらは現れる可能性のある潜在機能という．顕在機能と潜在機能を総称して機能と呼ぶ．また顕在機能を生じさせている状態を場と呼ぶ．（文脈によって誤解のない場合は，ある場における機能というように，顕在機能のことを機能と呼ぶ）．

実体概念

- [定義4] 実体概念とは，人間が実体を体験することによって成立させた概念である．これはその実体や属性や機能などのように，抽象化の結果得られる抽象概念とはまったく独立である．しかし，抽象概念はこの実体概念から発生する．

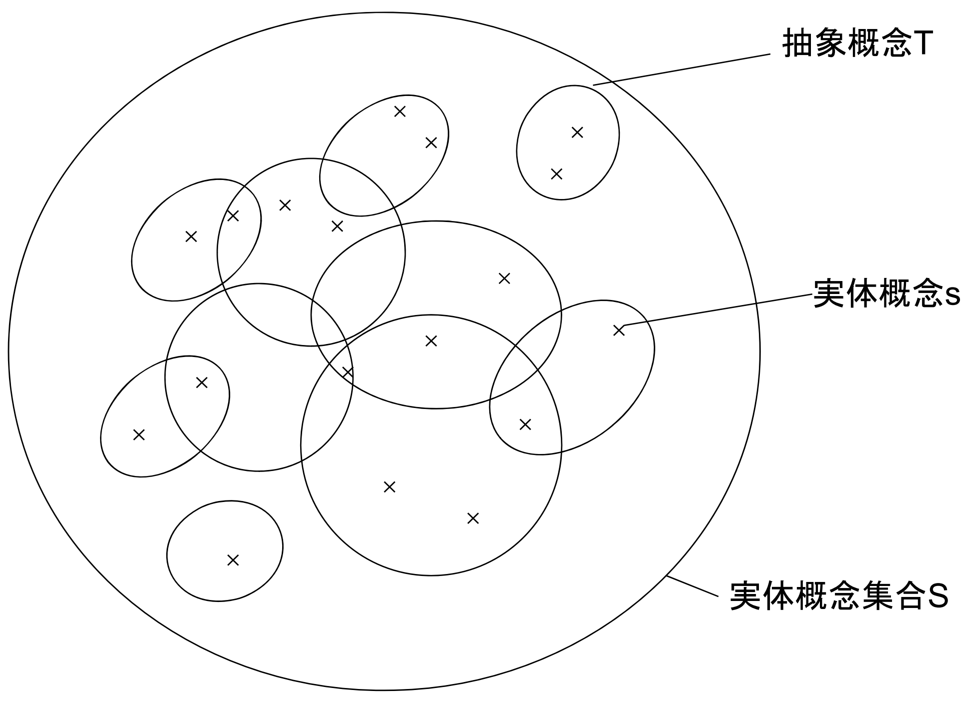
抽象概念，属性概念

- [定義5] 抽象概念とは，人間が意味ないし価値に導かれて実体概念を分類したときに，その各類に関する概念を言う．
- [定義6] 属性概念とは抽象概念の一つであるが，実在するものの属性は，人間が認識可能であり，従って属性を知ることによって実体を想定することができる．これは特に価値という側面は陽に意識はされない．むしろ意図としては没価値的にあるいはできるだけ客観的に実体を分類しようとするときに採用される類で，自然科学の態度に近いものである．

形態概念，機能概念

- [定義7] 形態概念とは，属性概念の一つであるが，属性のうち特に形態に注目すると形態概念が成立する.
- [定義8] 機能概念とは，抽象概念の一つであるが，特に実体の持つ機能的価値に注目するときに成立するものである.

実体概念集合と抽象概念集合

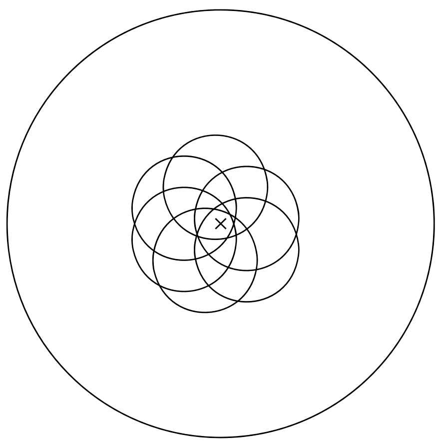


理想的知識の公理系への要求

- 概念間に類似性，すなわち距離がある
- 設計解の導出は，極限への収束である
- 概念間には写像がある
- 概念間にはある定められた演算（操作）がある
- 概念を現実を反映している
- 概念は独特の構造をもっている
- 概念は演算の結果，成長する

認識公理

- 公理1（認識公理）．実体は属性（あるいは機能，形態などの抽象概念）によって認識あるいは記述することが可能である．
- この公理は人間による実体の可観測性を保障している．すなわちT_1, T_2, T_3, …∈$\boldsymbol{T}$を列挙することで，実体を観察したり認識したりできる．



存在物と概念との対応関係

- 公理2（存在物と概念との対応関係）．実体集合と（理想的な）実体概念集合とは1対1に対応する．
- この公理によって，実体S'を考える代わりに，それと合同である実体概念集合Sを用いて議論をすすめてよいことになる．また，実際，実体概念集合S'は，過去に存在したもの，現在存在するもの，将来存在しうるものを含むことになっているが，現実にはこの公理を満たすような実体概念集合を知識として持つ人間はありえない．この意味で，この公理は人間の知識の極限を述べた「スーパーマンの存在保証公理」である．

概念に関する位相公理

- 公理3（概念に関する位相公理，または概念の操作公理）．抽象概念集合は実体概念集合の位相である．
- 数学的な意味
  - (A1): [空集合]$\in \mathbf{T}$, S$\in \mathbf{T}$
  - (A2): $T_1, T_2 \in \mathbf{T} \rightarrow T_1 \cap T_2 \in \mathbf{T}$
  - (A3): $T_\lambda \in \mathbf{T}$, $\lambda \in \Lambda$（Λは任意の濃度を持つ集合）$\rightarrow \cup T_\lambda \in \mathbf{T}$

を満たすとき，Sの部分集合系としてTが位相をなす

例

- 例１
  - $S = \{a, b, c\}$
  - $\boldsymbol{T} = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
  - $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \boldsymbol{T}$
- 例１
  - $S = \{a, b, c\}$
  - $\boldsymbol{P}(S) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

機能概念集合と属性概念集合

- 一つの台集合に異なる位相を定義できる
  - 機能概念集合$\boldsymbol{T}_1$の導入: 機能空間$(S, \boldsymbol{T}_1)$
  - 属性概念集合$\boldsymbol{T}_0$の導入: 属性空間$(S, \boldsymbol{T}_0)$

位相の強弱

- [定理1] 実体概念集合Sに位相を導入して，抽象概念集合$(S, \boldsymbol{T})$, 属性概念集合$(S, \boldsymbol{T}_0)$, 機能概念集合$(S, \boldsymbol{T}_1)$, 形態概念集合$(S, \boldsymbol{T}_2)$をつくる．このとき，これらの位相の強弱関係は
  - $\boldsymbol{T} \supset T_0 \supset T_2$
  - $T \supset T_1$

理想的知識における設計

- [定義9] 理想的知識とは，実体集合のすべての元を知っており，かつ各元を抽象概念で厳密に表現可能な知識をいう．
  - ここでいう理想的知識は定義1の実体集合，公理1－3の完全性を受け継ぐ「スーパーマンの知識」である
- [定理2] 理想的知識はハウスドルフ空間である．
  - 理想的知識においては実体のすべての性質を抽象概念として記述できて，かつSの元S1, S2が抽象概念によって「厳密に表現」できることを数学的な位相に関する性質（位相の分離）として述べたこと

理想的知識がハウスドルフ空間であること

- (1) 理想的知識においては実体概念集合Sは実体集合S'と合同である．そのSに，部分集合系としての抽象概念集合$\boldsymbol{T}$が導入される．
- (2) いまSの元s_1, s_2を考える．これらの近傍系を$\boldsymbol{T}(s_1)$, $\boldsymbol{T}(s_2)$と書く．もちろん$\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{T}(s); s \in S\}$である．
- (3) 実体が抽象概念によって厳密に表現されるというのは，Sの元s_1, s_2が抽象概念によって区別可能であることが必要条件であるから，近傍$T_1 \in \boldsymbol{T}(s_1)$, $T_2 \in \boldsymbol{T}(s_2)$を適当にとって，$T_1 \cap T_2 = \emptyset$となることが可能でなければならない．このような分離を満たす位相をもつ空間はハウスドルフ空間である．
- (4) また逆に，ハウスドルフ空間であれば収束の一意性が保証されるから十分である．

近傍，近傍系

- *ある集合Xの部分集合A* が $x \in X$ の**近傍**であるとは、開集合Uであって $x \in U$ かつ $U \subset A$ なるものが存在すること
- ある集合Xの各点pに対して，近傍V(p)の全体の集合N(p)が次の性質を満たすとき，pの近傍系という．

$$U \in \boldsymbol{N}(p) \to p \in U$$

$$U \in \boldsymbol{N}(p), U \subseteq V \to V \in \boldsymbol{N}(p)$$

$$U, V \in \boldsymbol{N}(p) \to U \cap V \in \boldsymbol{N}(p)$$

$$U \in \boldsymbol{N}(p), V \subseteq U, V \in \boldsymbol{N}(p)[\forall q \in V (U \in \boldsymbol{N}(q))]$$

$$X \in \boldsymbol{N}(p), \text{ただし}\boldsymbol{X}\text{は全体空間}$$

- 集合Xのすべての点pにおいて，近傍系N(p)が定義できるときは，その集合の部分集合系はXの位相となる．すなわち，上記の公理は位相の公理と等価

設計仕様

- [定義10] 設計仕様とは，要求者が設計解としの実体，s’∈S’がもつべき性質を抽象概念によって指定したものである．従って設計仕様は
  $T=\cap_{\lambda\in\Lambda}T_{\lambda}$（$T_{\lambda}\subset\mathbf{T}$，$\lambda\in\Lambda$，Λは任意の濃度の集合）
  であり，s∈Tであるsが設計解である．
  逆にs’が与えられたとき，s’の仕様とはs∈Sの近傍 $T\in\mathbf{T}(s)$
  また，$T\subset\mathbf{T}_1$であるとき，機能的仕様と呼ぶ．

設計解

- 設計解の可能性
  - $T = \{s1\}$ ；理想的な仕様
  - $T = \{s1, s2, \ldots\}$ ；あいまいな仕様
  - $T = \varphi$ ；矛盾した仕様
  - $T \notin \mathbf{T}$ ；極限がSの外にある

設計解

- [定義11] 矛盾していない設計仕様とは有限交叉性を満たす設計仕様のことである.
  - $T = T_{\lambda 1} \cap T_{\lambda 2} \cap \ldots \cap T_{\lambda n} \neq \phi$

フィルタ

- フィルタとは以下の条件を満たす集合系**F**である
  - (F1): $\varphi \notin \mathbf{F}$
  - (F2): $S \in \mathbf{F}$
  - (F3): $F_1 \in \mathbf{F},\ F_1 \subset F_2 \subset S \rightarrow F_2 \in \mathbf{F}$
  - (F4): $F_1, F_2 \in \mathbf{F} \rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathbf{F}$

設計過程

- [定理3] 矛盾していない設計仕様からフィルタを生成することができる
  - 矛盾していない設計仕様は有限交叉性を満足するので，フィルタを生成可能
  - フィルタFにおいて，その要素G_iから任意の点x_iをとってきて，有向点列{x_i}を作ることができ，
    $\lim_{i\to\infty} x_i = a$
    すなわち収束することが知られている
  - なおこの有向点列は一意ではない．

設計解

- [定義12] 設計解とは，仕様Tに含まれかつ製造に必要な全情報をもっている実体概念sである
- [定理4] 理想的知識における実体概念は設計解である
  - 実体概念が定まるとその近傍としての抽象概念を知ることができる
    - 定理2より理想的知識はハウスドルフ空間なので，異なる元を厳密に区別することができる近傍をもつけることができる
  - その抽象概念の近傍系の中には製造に必要な全情報は（属性概念として）含まれている

設計

- [定理5] 属性空間における実体概念は設計解である
- [定義13] 設計とは，抽象概念空間上で与えられる設計仕様に対して，設計解の属性空間上の近傍系を求めることである.
  - この定義は，$T \in \mathbf{T}$なる設計仕様に対して，設計解$s \in T$を見つけ，その近傍系$(T \in)\ \mathbf{T}(s) \subset \mathbf{T}_0$を求めることが設計

設計

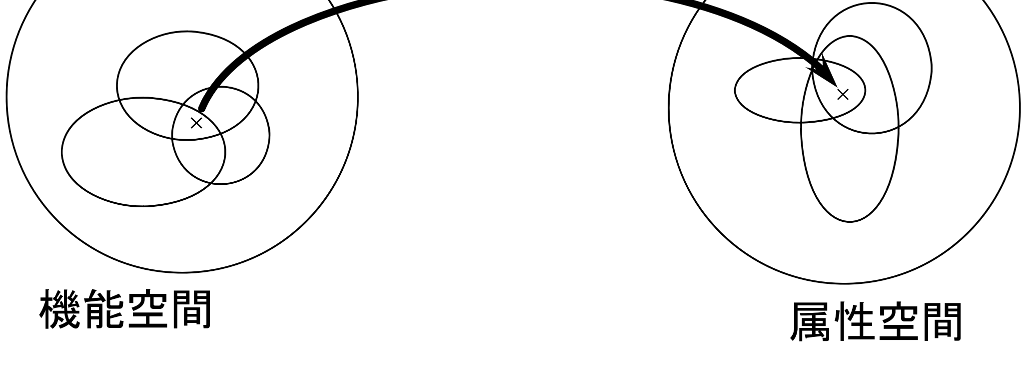
- [定理6] 設計仕様を表現する抽象概念空間が部分空間として属性空間に限定されるとき，設計は仕様を記述したときに完了する
  - カタログなど
- [定理7] 理想的知識での設計は，仕様を記述したときに完了する
  - 抽象概念をもちいて仕様を詳細化していくと，ある実体概念を記憶のなかから探し出すことができ，次にその実体概念の近傍系を分析して，その属性概念を求めれば設計解

理想的知識下の設計の問題点

- 理想的知識では無限個の仕様を記述することが原則
- 実体概念に関しても無限の記憶が必要
- 設計仕様に矛盾が許されない

設計

- [定義14] 設計とは，機能空間の点を属性空間の点に移す写像である．

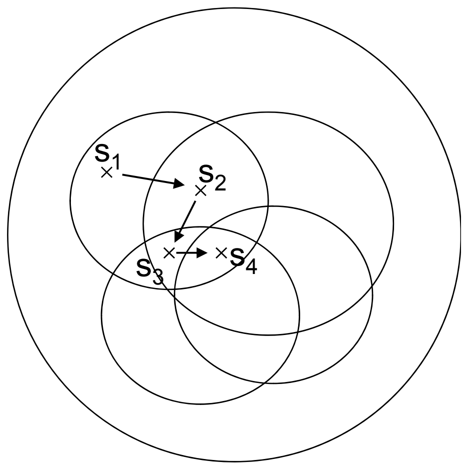


設計過程

- [定理8] 仕様の詳細化の過程に対応して，実体概念の元の順序列が存在し，それは一点に収束する.

設計過程

- 仕様の詳細化とは
  $T=\cap_{\lambda\in\Lambda}T_\lambda$（$T_\lambda \subset \mathbf{T}$，$\lambda\in\Lambda$，$\Lambda$は任意の集合）
  である設計仕様から任意のT_1，T_2をとって
  $T^1 = T_1$
  $T^2 = T^1 \cap T_2$
  の要領でT^iを順次作っていく
- そうすると$T^i \subset T^{i-1}$
- T^iに含まれる実体概念の一つをs_i
- $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$



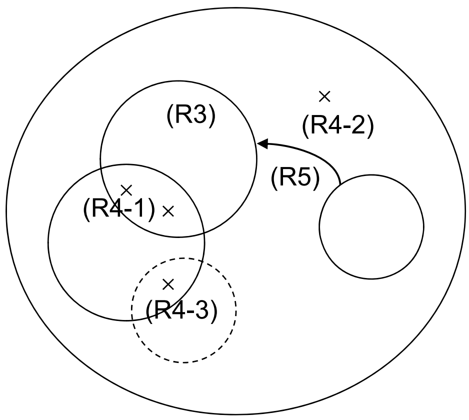
現実的知識

- 理想的知識の理想性
  – (I1) 構造的理想性：実体概念のすべての元が記憶されていて，どれもが分離可能．それは機能および属性においても成り立つ
  – (I2) 操作的理想性：設計仕様を詳細化するとき，フィルタの条件を満たしていること．また詳細化しようとしたときに縮小列がえられること．しかも有限時間で一点に収束する
  – (I3) 分析における理想性：実体概念の元に到達したあと，その属性位相の近傍系をすべて抽出可能

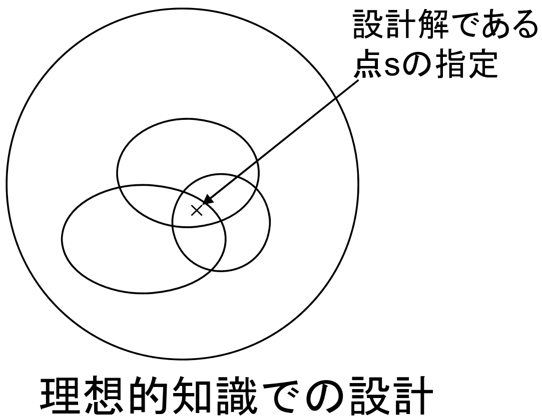
  – (I4) 記憶・知識（の容量）の無限性
  – (I5) 思考速度の無限性

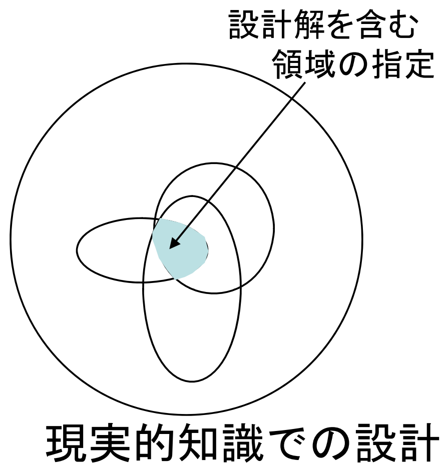
現実知識への要求事項

- (R1) 記憶の有限性
- (R2) 思考速度の有限性
- (R3) 実体概念に関する不完全性：ある抽象概念に対して，実体概念が存在しない（「空孔」）
- （R4) 実体分類の不完全性：位相の欠陥
  – 「転位」：異なる実体概念が分離されない
  – 「析出物」：抽象概念によって分類されない孤立した実体概念
  – 「不純物」：間違った抽象概念によって分類された実体概念
- (R5) 操作上の不完全性：詳細化によって不可能な設計仕様をつくり収束不可能になったり，きわめて収束が遅くなったりする．「散乱」
- (R6) 分析の不完全性：たとえ属性空間における部分集合を指定しても，近傍に関する記憶が不完全であるため，設計解が属性概念によって正しく記述できない．「結晶粒界」



理想的知識での設計と現実的知識での設計





現実的知識

- [定義15] 理想的知識に（R1からR6までの）不完全性を導入した知識を現実的知識という
- [定理9] 現実的知識では理想的知識における意味での実体概念を媒介とする設計は不可能である

現実的知識における設計

- [定理10] 現実的知識では，機能概念集合系の元（すなわち機能概念）と，属性概念集合系の元（すなわち属性概念）との間に，実体を媒介としない何らかの直接的対応が見出されるとき，またそのときに限り設計が可能である
  – 機能概念と属性概念を結ぶ対応があれば，設計可能（それが次の課題）
  – 部分的に実体概念との対応があれば，そこだけは設計可能（実験設計学の例）
  – 逆に言えば，「設計とは，我々のもっている実体概念に関する知識の不完全性を発見することである」ともいえる
    - ないものを「創造」する
    - 知識がないことを知り，知識を作る（「二つのアブダクション」）

狭義の現実的知識

- [定義16] 物理法則とは，ある場における実体と場に関わる物理量間の関係を記述したものである.
- [定義17] 属性とは，有限個の物理法則を用いて計測可能な物理量のことである.
  – 属性a_iの計測とは，m個の物理法則Pf_j
    $Pf_j(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = 0\ (1 \leqq j \leqq m)$
    を連立してとけばよい.
  – つまり「実体の属性による認識，記述」とはこの方法

物理法則

- [定義18] 物理量に関する概念は抽象概念のひとつであり，とくにある実体がある場におかれたときに，物理法則の発現としての物理法則に注目して成立する.
  - 物理法則に関する概念の集合を***T**p*と書き，物理法則概念集合と呼ぶ.
  - 物理法則は有限個（自然数に対応付けられる無限個）
  - $\mathbf{T}_P \subset \mathbf{T}$

実現可能な実体概念集合

- $\mathbf{T}_P \subset \mathbf{T}$
- Sには物理的に実現不可能なものを含むので
- $S \notin \mathbf{T}$であるべき
- そこで，S~（実現可能な実体概念集合）を考える.
- S~$\in$ $\mathbf{T}_P$かつS~$\subset$S
- [定義19] 物理法則概念によってその挙動を拘束される実体概念の集合を実現可能な実体概念集合S~と呼ぶ

実現可能な実体概念集合の性質

- [定理11] 実現可能な実体概念集合は，抽象概念位相に関してハウスドルフ空間である.
- [定理12] 物理法則概念集合は実現可能な実体概念集合の被覆である.
  - 被覆とはある集合の開部分集合のこと
    - $S^{\sim} = \cup T_{pi}$（$\forall T_{pi} \in \mathbf{T}_p$）

実現可能な実体概念集合の性質

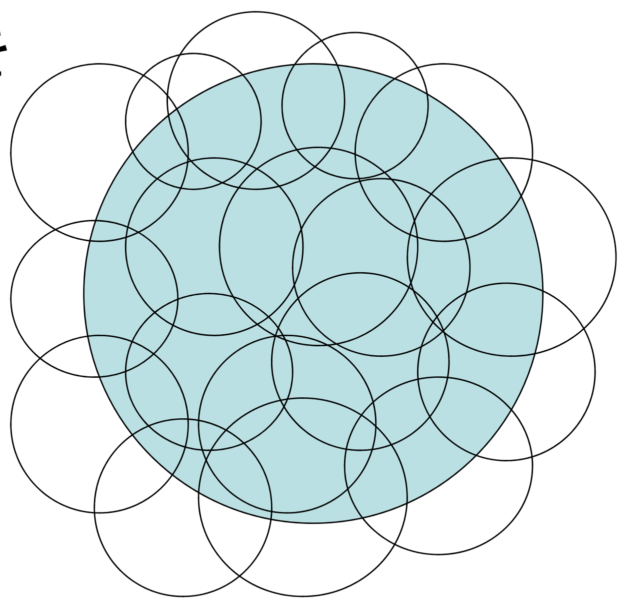
- [定理13] 実現可能な実体概念集合において，物理法則概念集合は属性概念位相の開基である.
  - $\mathbf{T}_p$が$S^{\sim}$の位相$\mathbf{T}_0$の開基である条件は
    (B1): $\mathbf{T}_p \subset \mathbf{T}_0$
    (B2): $\forall T \in \mathbf{T}_0$ ($\exists \mathbf{T}_a \subset \mathbf{T}_p$ ($T = \cup T_a$ ($T_a \in \mathbf{T}_a$)))
  - B1は，ある物理法則が，属性a_i(i=1,･･･, N)の関係式で表現できること
  - B2は，属性を物理法則を示す関係式を連立させて求めることができること

（狭義の）現実的知識の仮定

- [仮定1] 現実的知識とは，既知の物理法則について生成された概念を被覆としてコンパクト化された実現可能な実体概念集合である．
- コンパクト化とは，ある空間が有限個の被覆の和集合で覆われるということ
  - $\forall u \in \boldsymbol{P}(S^{\sim})\ \ \exists \Lambda (u = \cup_{\lambda \in \Lambda} T_{\lambda},\ T_{\lambda} \in \mathbf{T}_{p})$
    Λは有限集合，$\boldsymbol{P}(S^{\sim})$は$S^{\sim}$のべき集合

（狭義の）現実的知識の仮定

- 実体概念の挙動や性質は，無限個ではなく有限個の物理法則で説明がつくこと
- 逆にそれだけの制約をうけること



実現可能な実体概念集合の性質

- [定理14] 実現可能な実体概念集合は属性概念位相についてコンパクト・ハウスドルフ空間である
- この定理により，仮定1で与えた(S~, $\mathbf{T}_p$)で考えても，(S~, $\mathbf{T}_0$)で考えても，コンパクト・ハウスドルフ空間であるので，数学的には等価.
- なので，以下では(S~, $\mathbf{T}_0$)で考える

実現可能な実体概念集合の性質

- [定理15] 現実的知識(S~, $\mathbf{T}_0$)は（理想的な）実体概念集合Sの閉（部分）集合である
- [定理16] 現実的知識(S~, $\mathbf{T}_0$)で，評価関数f: S~→$\mathbf{R}$($\mathbf{R}$: 実数体）が存在して連続であれば，この関数はfは最大値と最小値をもつ

現実的知識における設計

- 理想的知識での設計では
  - 設計仕様とはフィルタ（定理3）
  - 矛盾しない仕様であるためには有限交叉性が必要
- 現実的知識での設計では
  - 上記は前提とする

設計仕様の性質

- [定理17] 現実的知識では矛盾していない設計仕様は集積点を持つ

設計仕様の性質

- 設計仕様$T=\cap_{\lambda\in\Lambda}T_\lambda \in \mathbf{T}$から$(S^{\sim}, \mathbf{T}_0)$の点列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$($\mathbf{N}$: 自然数全体の集合)をとる
- Λは可算個なのでNで代用可能 $T=\cap_{i\in\mathbf{N}}T_i$
- $T^1 = T_1$ ($\neq \phi$: 定義11より)
- $T^2 = T_1 \cap T_2 \ = T^1 \cap T_2$ ($\neq \phi$)
- …
- $T^n = T^{n-1} \cap T_n$ ($\neq \phi$)
- T^nに属する適当な元x_nをとり，$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$なる点列がつくれる
- コンパクト・ハウスドルフ空間ではこのような点列は集積点をもつ

集積点

- 集積点とは，無限,集合 M の相異なる点からなる無限点列 { $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ } が， $n \to \infty$ において，ある点 P に近づくときの，点 P を M の集積点
- ただし，集積点はひとつとは限らない
  - 例：$n\to\infty$のときの数列$\{(-1)^n\}$

設計仕様の性質

- [定理18] 現実的知識では矛盾してない設計仕様から収束する部分点列をつくることができる
  - 定理17：設計仕様に対して実体概念が（複数の）集積点となること
    - 人によって解にいたる道筋も違うし，解も違う
  - 定理18：適当な方法によって，特定の実体概念に到達すること

設計仕様の性質

- [定理19] 現実的知識において，設計仕様から有向点列が得られるならば，その点列は高々1点に収束する.
  - 現実的知識に何らかの（半）順序<を導入する
  - 現実的知識($S^{\sim}$, $\mathbf{T}_0$)はコンパクトなので，（上に）有界なので，$s_i \in S^{\sim}$ ($i \in \mathbf{N}$)について
    $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$
    なる有向点列は高々1点に収束する

一般設計学まとめ

- 理想的知識
  - 理想的知識はハウスドルフ空間である
  - 理想的知識での設計は仕様を記述したときに完了する
- （広義の）現実的知識
  - 機能概念集合系の元と属性概念集合系の元の間に，実体概念を媒体としない何らかの直接的な対応がみられるとき，そのときに限り設計が可能である
  - 設計とはわれわれのもつ知識の不完全性を発見することである

一般設計学まとめ

- （狭義の）現実的知識
  - 実体の属性，物理的な状態や挙動は物理法則で記述できる
  - 現実的知識はコンパクト・ハウスドルフ空間である
  - 現実的知識では，（値を持つ）属性は最大値，最小値をもつ
  - 現実的知識では，設計仕様は集積点をもつ
  - 現実的知識では，設計仕様から収束する部分点列をつくることができ，実体概念に到達することができる.

一般設計学と実験設計学の知見の比較

- 知識
  - 機能，属性といった抽象概念とその関係はよく対応
    - 複数実体の間の関係は？

一般設計学と実験設計学の知見の比較

- 設計
  - （一）広義の現実的知識では機能と属性の対応を必要とした
  - （実）機能と実体，実体と属性の（不完全な）対応関係で設計

一般設計学と実験設計学の知見の比較

- 設計解
  - (一)現実的知識では設計仕様は集積点をもつ
  - (実)ある設計仕様に対して，複数の設計解．あるいは異なる設計者は異なる設計解
- 設計過程
  - (一)理想的知識では写像，現実的知識では収束過程
  - (実)段階的詳細化