BDI Logicのsequent calculusによる演繹体系

新出尚之 高田司郎

In this paper, we give a sound and complete deduction system for BDI logic whose base is restricted to propositional CTL, using Gentzen's sequent calculus. In this system we can construct a proof of a formula using Wang's algorithm with some extension. In this way, we can check the provability of a formula straightforwardly, and in addition, can give an easily understandable proof of the formula.

1 はじめに

BDI Logic [2] は, branching time temporal logic の一種である CTL* [1] に, BEL(信念), DESIRE(願望), INTEND(意図) といった心的状態を表す様相を導入して拡張した時相述語論理であり, マルチエージェント環境を含む合理的エージェントの仕様記述[2] [5] などに用いられている.

BDI Logic を基礎概念においた合理的エージェントの実現手法として, BDI アーキテクチャ [4] [6] が提案されている. しかし, 現状の BDI アーキテクチャは, 動作の基本となるループや心的状態の更新が手続き的に行われているなど, 論理体系との整合性が不十分な箇所が多いため, 仕様の自動検証が行いにくい, 論理的記述力への制約が多いなどの問題点がある.

我々はそれを解決する方法として, BDI アーキテクチャの Logic based な実現を検討している. そのためには, BDI Logic の公理化や, 一階述語論理の導出原理に相当するものの構築が必要となる. しかし, 現状では BDI Logic の公理化は十分とはいえず, ベースを命題論理の CTL に制限した BDI Logic の subset に対する健全で完全な演繹体系が Rao らによって与えられている [3] 程度であるが, これは Hilbert style のもので, 論理式の証明を見通しよく行うには向いておらず, BDI logic で書かれた仕様の論理的検証などにも向いていない.

本論文では, Rao らと同じく命題論理の CTL をベースとする BDI Logic の subset について, Gentzen の sequent calculus [7] による健全で完全な演繹体系を示す. これは, 彼らが与えた tableau 法による BDI logic の論理式の充足可能性の判定アルゴリズム [3] に, ほぼそのまま対応するものとなっている. また, この体系では, 命題論理の証明手続きとして知られる Wang のアルゴリズムを拡張したものを用いて, 論理式の証明可能性のチェックを見通しよく行え, 証明も人間にとって直感的に理解しやすいものが得られる.

2 論理式の定義

命題記号の集合 P をあらかじめ決めておく. 命題論理の CTL をベースとする BDI Logic の論理式は, 以下のように定義される.

- $p \in P$ ならば p は論理式 (これを原子命題という)
- ϕ と ψ が論理式ならば $\phi \vee \psi$, $\neg\phi$, $\mathsf{AX}\,\phi$, $\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$, $\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$, $\mathsf{BEL}(\phi)$, $\mathsf{DESIRE}(\phi)$, $\mathsf{INTEND}(\phi)$

Deduction Systems for BDI Logics Using Sequent Calculus.

NIDE Naoyuki, 奈良女子大学理学部情報科学科. Nara Women's University.

Shiro Takata, ATR メディア情報科学研究所. ATR Media Information Science Lab.

もそれぞれ論理式

必要に応じて括弧で曖昧さを除去. *true* は $q \vee \neg q$ の略記 (但し q は適当に選んで固定した P の要素), *false*, $\phi \wedge \psi$, $\phi \supset \psi$, $\phi \Leftrightarrow \psi$ はそれぞれ $\neg true$, $\neg((\neg\phi) \vee (\neg\psi))$, $(\neg\phi) \vee \psi$, $(\phi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \phi)$ の略記, また $\mathsf{EX}\,\phi$, $\mathsf{AF}\,\phi$, $\mathsf{EF}\,\phi$, $\mathsf{AG}\,\phi$, $\mathsf{EG}\,\phi$ はそれぞれ $\neg\,\mathsf{AX}\,\neg\phi$, $\mathsf{A}(true \;\mathsf{U}\; \phi)$, $\mathsf{E}(true \;\mathsf{U}\; \phi)$, $\neg\,\mathsf{EF}\,\neg\phi$, $\neg\,\mathsf{AF}\,\neg\phi$ の略記. 優先順位は, 単項論理記号 ($\neg$, AX など), $\wedge$, $\vee$, $\supset$ の順とし, 冗長な括弧は適宜省く.

3　意味論

3.1　BDI^{K}_{CTL}-structure

以下のものを定めておく.

- 可能世界の集合 $W(\neq \emptyset)$
- W の各要素 w に対して, state の集合 $St_w(\neq \emptyset)$ とその上の関係 $R_w \subset St_w \times St_w$ (但し, R_w は total であること. すなわち, 全ての $t \in St_w$ に対し, ある $t' \in St_w$ が存在して $t\,R_w\,t'$ を満たさねばならない)
- W の各要素 w と St_w の要素 t の組に対し, 命題記号への真偽値割り当て $L(w,t) \subseteq P$
- W, $\bigcup_{w \in W} St_w$, W 上の 3 項関係 $\mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \subset W \times \bigcup_{w \in W} St_w \times W$. 但し, 条件
  - $(w,t,w') \in \mathcal{B}$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$
  - $(w,t,w') \in \mathcal{D}$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$
  - $(w,t,w') \in \mathcal{I}$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$

  が満たされねばならない†1

このとき, tuple $M = \langle W, \{St_w \mid w \in W\}, \{R_w \mid w \in W\}, L, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\rangle$ を BDI^{K}_{CTL}-*structure* と呼ぶ. また, それがさらに条件

- (**B-*D***) 任意の $w \in W$ に対し, $(w,t,w') \in \mathcal{B}$ を満たす $w' \in W$ が存在する
- (**B-*4***) 任意の $w, w', w'' \in W$ に対し, $(w,t,w') \in \mathcal{B}$ かつ $(w',t,w'') \in \mathcal{B}$ ならば $(w,t,w'') \in \mathcal{B}$
- (**B-*5***) 任意の $w, w', w'' \in W$ に対し, $(w',t,w) \in \mathcal{B}$ かつ $(w',t,w'') \in \mathcal{B}$ ならば $(w,t,w'') \in \mathcal{B}$
- (**D-*D***) 任意の $w \in W$ に対し, $(w,t,w') \in \mathcal{D}$ を満たす $w' \in W$ が存在する
- (**I-*D***) 任意の $w \in W$ に対し, $(w,t,w') \in \mathcal{I}$ を満たす $w' \in W$ が存在する

を全て満たせば $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-*structure* と呼ぶ.

直感的には, state が一般の時相論理での「点時刻」, あるいは一般の様相論理の可能世界意味論での「可能世界」にあたり, R_w が時間の前後関係, $\mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{I}$ が様相としての信念·願望·意図を表す可視関係である.

3.2　論理式の解釈と恒真性

$w \in W$ に対し, St_w に属する state の無限列 $(t_0, t_1, \cdots)$ で, 条件 $t_0\,R_w\,t_1$, $t_1\,R_w\,t_2, \cdots$ を満たすものを, t_0 で始まる w 上の *path* という.

BDI^{K}_{CTL}-structure $M = \langle W, \{St_w \mid w \in W\}, \{R_w \mid w \in W\}, L, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\rangle$ と世界 $w \in W$, state $t \in St_w$ に対し, 論理式 ϕ が真である ($(M,w,t) \models \phi$ と書く) ための条件を, 以下のように定義する.

- ϕ が primitive proposition である ($\phi \in P$) 場合, $(M,w,t) \models \phi$ iff $\phi \in L(w,t)$
- $(M,w,t) \models \neg\phi$ iff $(M,w,t) \not\models \phi$
- $(M,w,t) \models \phi \vee \psi$ iff $(M,w,t) \models \phi$ or $(M,w,t) \models \psi$
- $(M,w,t) \models \mathsf{AX}\,\phi$ iff for all t' s.t. $t\,R_w\,t'$, $(M,w,t') \models \phi$
- $(M,w,t_0) \models \mathsf{A}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ iff
  t_0 で始まる w 上の任意の path $(t_0, t_1, \cdots)$ に対し, その中のある state t_i があって $(M,w,t_i) \models \psi$ かつ for all j s.t. $0 \leq j < i$, $(M,w,t_j) \models \phi$
- $(M,w,t_0) \models \mathsf{E}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ iff
  t_0 で始まる w 上のある path $(t_0, t_1, \cdots)$ とその中のある state t_i があって, $(M,w,t_i) \models \psi$ かつ for all j s.t. $0 \leq j < i$, $(M,w,t_j) \models \phi$
- $(M,w,t) \models \mathsf{BEL}(\phi)$ iff for all w' s.t. $(w,t,w') \in \mathcal{B}$, $(M,w',t) \models \phi$
- $(M,w,t) \models \mathsf{DESIRE}(\phi)$ iff for all w' s.t. $(w,t,w') \in \mathcal{D}$, $(M,w',t) \models \phi$
- $(M,w,t) \models \mathsf{INTEND}(\phi)$ iff for all w' s.t. $(w,t,w') \in \mathcal{I}$, $(M,w',t) \models \phi$

論理式 ϕ が, 全ての BDI^{K}_{CTL}-structure M の全ての世界 w, state t に対し $(M,w,t) \models \phi$ を満たすと

†1　Rao らの論文 [2] [3] ではこの条件を明示的に要請してはいないが, BEL などの様相記号の意味の定義が整合的であるためには明らかに必要であろう.

き, ϕ は BDI^K_{CTL}-*valid* であるといい, $\mathrm{BDI}^K_{CTL} \models \phi$ と書く．また, 全ての $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure M について同様の条件を満たすとき, ϕ は $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-*valid* であるといい, $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL} \models \phi$ と書く (いずれも, 誤解のおそれのない場合単に $\models \phi$ と書き, 単に valid であるということがある).

4 演繹体系

本章では演繹体系 $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ および BDI^K_{CTL} を導入する．なお本稿では, sequent の $\to$ の両側は論理式の multi set とする (従って exchange の推論規則は必要ない)．また本稿では, 文中で sequent の範囲を明示するために, sequent 全体を [ ] でくくることがある．

以下, ギリシア大文字は論理式の multi set, ギリシア小文字は単一の論理式を表す．また, 論理式の multi set Γ と単項論理演算子 K に対し, $K(\Gamma)$ で Γ の各論理式に K を付加して得られる multi set を表す．

4.1 推論規則

$(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の演繹体系は, 表 1 の推論規則のうち BEL–K, DESIRE–K, INTEND–K 以外の全て (これらを含めてもよいが冗長), また BDI^K_{CTL} の演繹体系は同表のうち BEL–KD45, DESIRE–KD, INTEND–KD 以外の全てを推論規則として持つ．

これらの規則は, 実は Rao らの BDI logic の決定アルゴリズム [3] の pseudo tableau の構築の各 step に対応している．例えば規則 BEL–KD45 は, [3] の 6.2 節, pseudo-$(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-tableau の構築における (d) に相当する．

この体系では, 前提が結論より大きくなる規則が存在するので, Wang のアルゴリズムをそのまま適用はできない．しかし, 6 章で述べるように, Weak の形を制限することによって, 証明図が必ず有限で止まるかループし, 無限に伸びないようにすることができる．従って証明可能性の判定は有限の手間で行える．

4.2 証明可能性の定義

ここでは, BDI^K_{CTL} および $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の演繹体系での, sequent の証明可能性の定義を与える．

定義 4.1 S を sequent とする．各ノードが 1 つの sequent をラベルとして持ち, 根のラベルが S であり, かつ葉以外の任意のノード N が条件

> N の子ノードが $N_1, \cdots, N_i$ であり, N および $N_1, \cdots, N_i$ のラベルが $S', S_1, \cdots, S_i$ であるならば, $\dfrac{S_1 \quad \cdots \quad S_i}{S'}$ という推論規則が存在する

を満たす木を, **S の推論木**という．

以下では, $\rho = \mathsf{A}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ の場合は $\mathsf{AX}\,\rho$ を, また $\rho = \mathsf{E}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ の場合は $\mathsf{EX}\,\rho$ を, $\mathsf{ÆX}\,\rho$ と表記する．

定義 4.2 S の推論木 T の葉でないノード N_0 から, その子孫の葉ノード L までの経路 $N_0, N_1, \cdots, N_n$ $(= L)$ が, 以下の条件を全て満たすとき, この経路を**導出のループ**という．

1. N_0 と L は等しいラベルを持つ
2. $N_1, \cdots, N_{n-1}$ の中には L と等しいラベルを持つものはない

定義 4.3 ある論理式 $\rho = \mathsf{A}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ あるいは $\rho = \mathsf{E}(\phi \;\mathsf{U}\; \psi)$ が存在して, 導出のループ $N_0, N_1, \cdots, N_n$ とその各ノードのラベル $S_0, S_1, \cdots, S_n (= S_0)$ が以下の条件を全て満たすとき, これを**終局性論理式 ρ を持つ導出のループ**という．

1. $S_i = [\rho, \Gamma \to \Delta]$ かつ $S_{i+1} = [\phi, \mathsf{ÆX}\,\rho, \Gamma \to \Delta]$ を満たす整数 $i\,(0 \le i < n)$ と Γ, Δ が存在する．また, $S_i = [\rho, \Gamma \to \Delta]$ かつ $S_{i+1} = [\psi, \Gamma \to \Delta]$ を満たす整数 $i\,(0 \le i < n)$ と Γ, Δ は存在しない．(大まかには, S_0 から S_n までの過程のどこかで, ρ に対する AU 左か EU 左が適用されており, かつ, 導出のループはその前提のうち右へ行く経路)
2. $S_i = [\Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta']$ および $S_{i+1} = [\Gamma \to \Delta]$ を満たす全ての整数 $i\,(0 \le i < n)$ と $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ に対し, Γ' に含まれる全ての論理式は
   - 原子命題
   - トップレベルのオペレータが BEL, DESIRE, INTEND のいずれかである論理式
   - Γ に含まれる論理式

   のいずれかである．また, Δ' に含まれる全ての論理式は
   - 原子命題
   - トップレベルのオペレータが BEL, DESIRE, INTEND のいずれかである論理式

表 1　$(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$, BDI^{K}_{CTL} **の推論規則**

$$\frac{\Gamma \to \phi, \Delta}{\neg\phi, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\phi, \Gamma \to \Delta \quad \psi, \Gamma \to \Delta}{\phi \vee \psi, \Gamma \to \Delta}\ (\vee\text{左}) \qquad \frac{\phi, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \neg\phi, \Delta}\ (\neg\text{右}) \qquad \frac{\Gamma \to \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \to \phi \vee \psi, \Delta}\ (\vee\text{右}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta'}\ (\mathrm{Weak})$$

$$\frac{\psi, \Gamma \to \Delta \quad \phi, \mathsf{AX}\,\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}{\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}\ (\mathsf{AU}\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \to \psi, \phi, \Delta \quad \Gamma \to \psi, \mathsf{AX}\,\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}{\Gamma \to \mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}\ (\mathsf{AU}\ \text{右})$$

$$\frac{\psi, \Gamma \to \Delta \quad \phi, \mathsf{EX}\,\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}{\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}\ (\mathsf{EU}\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \to \psi, \phi, \Delta \quad \Gamma \to \psi, \mathsf{EX}\,\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}{\Gamma \to \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}\ (\mathsf{EU}\ \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{AX}(\Gamma) \to \mathsf{AX}(\Theta)}\ (\mathsf{AX}\text{–}\mathrm{KD}) \qquad \frac{\Gamma \to \phi}{\mathsf{BEL}(\Gamma) \to \mathsf{BEL}(\phi)}\ (\mathsf{BEL}\text{–}\mathrm{K}) \qquad \frac{\Gamma, \mathsf{BEL}(\Gamma) \to \mathsf{BEL}(\Delta), \Theta, \mathsf{BEL}(\Theta)}{\mathsf{BEL}(\Gamma) \to \mathsf{BEL}(\Delta), \mathsf{BEL}(\Theta)}\ (\mathsf{BEL}\text{–}\mathrm{KD45})$$

$$\frac{\Gamma \to \phi}{\mathsf{DESIRE}(\Gamma) \to \mathsf{DESIRE}(\phi)}\ (\mathsf{DESIRE}\text{–}\mathrm{K}) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{DESIRE}(\Gamma) \to \mathsf{DESIRE}(\Theta)}\ (\mathsf{DESIRE}\text{–}\mathrm{KD})$$

$$\frac{\Gamma \to \phi}{\mathsf{INTEND}(\Gamma) \to \mathsf{INTEND}(\phi)}\ (\mathsf{INTEND}\text{–}\mathrm{K}) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{INTEND}(\Gamma) \to \mathsf{INTEND}(\Theta)}\ (\mathsf{INTEND}\text{–}\mathrm{KD})$$

(但し, Θ は高々1 つの論理式とする)

- Δ に含まれる論理式

のいずれかである.

(大まかには, S_0 から S_n までの過程で Weak を適用して, AX, AU, EU をトップレベルに持つ論理式が消されることはない)

定義 4.4　sequent S が**証明可能**であるとは, 以下の条件を全て満たす S の推論木 T が存在することをいう. ここで *initial sequent* とは, $[\Gamma, \phi \to \Delta, \phi]$ という形の sequent である.

1. T の全ての葉は, initial sequent をラベルとして持つか, あるいは導出のループの終点である
2. T の全ての導出のループを合わせたグラフ (導出のループに含まれるノードと枝全てからなるグラフ) の各連結成分 T'(これは T の部分木になる) に対し, ある論理式 ρ があって, T' に含まれる T の導出のループは全て, 終局性論理式 ρ を持つ

BDI^{K}_{CTL} および $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の演繹体系において, $[\to \phi]$ という sequent が証明可能であるとき, 論理式 ϕ が証明可能であるという.

4.3　例

図 1 は, $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ における論理式 $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \supset \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$ の証明である (スペースの都合で図の一部を持ち上げている). この論理式は $\neg\,\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \vee \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$ の略記であるため, 証明の一番下はそれに $\to$ を前置したものになっている. なお, 下から 3 段目の $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$ から一番右の葉までが, 終局性論理式 $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q))$ を持つ導出のループになっていることに注意.

この証明の下から 3 段目以上は, 直感的には「$\mathsf{BEL}(q)$ ならば $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$」と,「『$\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q))$ ならば $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$』がある時刻で成り立つならばその直前の時刻でも成り立つ」を示すことによって, 数学的帰納法に近い感覚で「全ての時刻で『$\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q))$ ならば $\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))$』が成り立つ」を示していることになる. このように, 得られる証明は, Hilbert style の演繹体系に比べ, 直感的な理解しやすさで優るものになる.

また, 全く同様にして, 例えば $\mathsf{A}(\mathsf{INTEND}(\mathsf{AF}\,\phi)\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\phi)) \supset \mathsf{A}(\mathsf{INTEND}(\mathsf{AF}\,\phi)\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\phi) \vee \neg\,\mathsf{BEL}(\mathsf{EF}\,\phi))$ の証明もできる. これは, コミットメント戦略[2] の blind commitment が single-minded commitment より強いことの証明になっている.

5　健全性

本章では $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の健全性を示す. BDI^{K}_{CTL} の健全性もほぼ同様に示せる.

sequent $S = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \to \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m]$ ($n \geq 0 \leq m$) に対し, 論理式 $\neg\phi_1 \vee \cdots \vee \neg\phi_n \vee \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$ (但し $n = m = 0$ のときは *false*) を, S に対応する論理式と呼ぶ. S に対応する論理式が (M, w, t) で真のとき, (M, w, t) で S が真であるといい, $(M, w, t) \models S$ と書く. 特に, sequent S が valid であるとは, S に対応する論理式が valid であることと定義する.

補題 5.1　導出のループの中には, 空 sequent $[\to]$ は現れない.

図 1　$(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ **での証明の例**

$$\dfrac{p, \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)), p \qquad \dfrac{\dfrac{\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}{\mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\mathsf{AX}\text{–KD})}{p, \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)), \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\text{Weak})}{p, \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\mathsf{AU}\ 右)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q, \mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(q), \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q))}{\mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q))}\ (\mathsf{BEL}\text{–KD45})}{\mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)), p}\ (\text{Weak}) \qquad \dfrac{\dfrac{q, \mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(q), \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q))}{\mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q))}\ (\mathsf{BEL}\text{–KD45})}{\mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)), \mathsf{AX\,A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\text{Weak})}{\mathsf{BEL}(q) \to \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\mathsf{AU}\ 右) \qquad \uparrow}{\dfrac{\dfrac{\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \to \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}{\to \neg\,\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)), \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\neg 右)}{\to \neg\,\mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(q)) \lor \mathsf{A}(p\ \mathsf{U}\ \mathsf{BEL}(\mathsf{BEL}(q)))}\ (\lor 右)}\ (\mathsf{AU}\ 左)$$

証明　定義から, 導出のループは長さ 2 以上でなければならないが, 結論を空, 前提を非空にできる推論規則は存在しない. □

補題 5.2　導出のループの中では, 推論規則 AX–KD か BEL–KD45 のいずれかが少なくとも 1 回適用されており, かつ, その両方は使われていない. また, DESIRE–KD, INTEND–KD は使われていない.

証明　導出のループの中では, 前提が結論より小さくない推論規則が使われていなければならない. 従って, AU/EU 左·右のいずれかか, または BEL–KD45 が使われている.

もし AU/EU 左·右が使われているならば, そこで AX より内側にない AU(または EU) を 1 つ減らしている (ここで「減る」とは, S_i に対して S_{i+1} で, すなわち結論に対して前提で減っていることを意味する. 以下も同様). よって, ループであるためにはそれをどこかで増やさなければならないが, それができる規則は AX–KD か BEL–KD45 だけである. 従って AX–KD†2あるいは BEL–KD45 が使われている.

仮に, その両方が使われているとする. BEL–KD45 の結論は補題 5.1 より空ではないので, それに現れる論理式のうち, BEL を最も多く持つもの全ての集合を BEL(Ξ) とする. すると, この先 Weak が適用されるまでは,「sequent に現れる論理式のうち BEL を最も多く持つもの全ての集合は BEL(Ξ) である」という事実は変わらない.

しかし, AX–KD を適用するには, Weak で BEL(Ξ) を消さねばならず, この時, sequent に現れる各論理式が持つ BEL の個数の最大は減る. そして, それを増やせる規則は存在しない. 従って, BEL–KD45 が使われているならば AX–KD は使われていない.

また, DESIRE–KD が使われているとすると, sequent に現れる各論理式が持つ DESIRE の個数の最大がそこで減るが, これを増やす規則はない. 従って, DESIRE–KD は使われていない. INTEND–KD も同様である. □

補題 5.3　終局性論理式 ρ を持つ導出のループの中では, 推論規則 AX–KD が少なくとも 1 回適用されており, かつ BEL–KD45, DESIRE–KD, INTEND–KD は使われていない. また, AX–KD のある適用から次の適用までの間には, ρ に対する AU/EU 左が少なくとも 1 回適用されている.

証明　終局性論理式 ρ を持つ導出のループの中には, AU/EU 左が適用されて ρ が ÆX ρ になっている箇所がある. Weak の形の制限 (定義 4.3 の 2) から, ρ や ÆX ρ は Weak では消せないので, sequent に現れる論理式のトップレベルを BEL ばかりにすることはできず, BEL–KD45 は使えない. 従って補題 5.2 から, AX–KD が使われており, DESIRE–KD, INTEND–KD は使われていない.

また, 同じ理由から, ρ は, AU/EU 左の適用で ÆX ρ に変化しては, AX–KD の適用で ρ に戻ることを繰り返す. 従って AX–KD の適用から適用までの間には, ρ に対する AU/EU 左が必ず適用されている. □

補題 5.4　AX–KD,　BEL–KD45,　INTEND–KD,

†2　但しこの証明では, ループを 1 周して戻ってきた時の ρ は, AU/EU 左の適用で得られた ÆX ρ の ÆX を AX–KD で除去して得たものであるとは必ずしも保証していないことに注意. 他の論理式の部分論理式であった ρ が分解されて出てきた可能性を排除していないからである.

DESIRE–KD 以外のある推論規則の前提が $S_1, \cdots, S_n$, 結論が S であり, かつ $(M,w,t) \not\models S$ となる (M,w,t) が存在するならば, $(M,w,t) \not\models S_i$ となる $i\,(1 \le i \le n)$ が存在する.

また, AX–KD の前提が S_1, 結論が S であり, かつ $(M,w,t) \not\models S$ となる (M,w,t) が存在するならば, $t\,R_w\,t'$ かつ $(M,w,t') \not\models S_1$ となる t' が存在する.

証明 論理式の解釈の定義より直ちに従う. □

補題 5.5 ρ が $\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ か $\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ のいずれかであるとする. $(M,w,t) \not\models [\rho, \Gamma \to \Delta]$ かつ $(M,w,t) \models [\psi, \Gamma \to \Delta]$ ならば, $(M,w,t) \models \rho$ かつ $(M,w,t) \not\models \psi$ である.

証明 論理式の解釈の定義より直ちに従う. □

補題 5.6 終局性論理式 $\rho = \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ を持つ導出のループの中で, ノード N と N' の間で AX–KD が適用されており (すなわち, N のラベル S が AX–KD の結論で, N' のラベル S' がその前提), しかも $(M,w,t) \not\models S$ とする. すると, $t\,R_w\,t'$ なる任意の t' に対し, $(M,w,t') \not\models S'$ iff $(M,w,t') \models \rho$ となる.

証明 ある Γ が存在して $S = [\mathsf{AX}(\Gamma) \to \mathsf{AX}\,\neg\rho]$, $S' = [\Gamma \to \neg\rho]$ と書けることから, 論理式の解釈の定義より直ちに従う. □

定理 5.7 体系 $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ は健全である.

証明 sequent S の推論木 T の全ての導出のループを合わせたグラフ G の連結成分の個数 j に関する帰納法で示す. $j = 0$ の場合は trivial なので, $j < k\,(k > 0)$ の場合を仮定して $j = k$ の場合を示す.

S が valid でないとする. 全ての推論規則は, 前提が全て valid ならば結論も valid であるので, 結論が valid でないなら前提のどれかが valid でない. 従って T の根から子へ, ラベルが valid でないノードを選んでたどっていくことができる. するといつかは, G のある連結成分 T' の根 R に着く. なぜなら, そうでないと導出のループの終点でない葉に着いてしまい, 矛盾するからである.

T' に含まれる T の導出のループが共通に持つ終局性論理式を ρ とする. $\rho = \mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ または $\rho = \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ である.

R からさらに子へ, ラベルが valid でないノードを選んでたどっていく. このとき T' の外に出ることはない. なぜなら, R の子孫のうち T' に属さないノードのラベルは, 帰納法の仮定から valid だからである.

するといつかは, あるノード N' とその子ノード N_0 の間で, ρ に対する AU 左か EU 左が適用されている箇所に着く.

N', N_0 のラベルをそれぞれ S', S_0 とすると, S' が valid でないことから, ある (M,w,t_0) が存在して $(M,w,t_0) \not\models S'$ である. また, ここで適用される AU 左か EU 左の前提のうち左は, 定義 4.3 の 1 から T' の外であり, 従って valid である. よって補題 5.5 から $(M,w,t_0) \models \rho$ かつ $(M,w,t_0) \not\models \psi$ である. また, $(M,w,t_0) \not\models S_0$ も成り立つ.

補題 5.3 より, N_0 からその子ノードへの過程で使われている推論規則は BEL–KD45, DESIRE–KD, INTEND–KD 以外のいずれかである. 補題 5.4 より, ここで使われている推論規則が AX–KD 以外であれば, $(M,w,t_0) \not\models S_1$ を満たすラベル S_1 を持つ N_0 の子ノード N_1 があり, また, AX–KD であれば, N_0 の唯一の子ノード N_1 のラベル S_1 に対し, $t_0\,R_w\,t_1$ かつ $(M,w,t_1) \not\models S_1$ となる t_1 が存在する. いずれの場合も N_1 は T' の中にある.

以下, N_0 から N_1 への過程と同様にして, N_1 からそのある子ノード N_2 へ, さらに子ノード N_3 へ$\cdots$とたどることを繰り返し, T の葉 (T' の葉でもある) にたどり着いたら, それと同じラベルを持つ T' の (葉でない) ノードに戻ってさらに続けていくことにより, ノードの無限列 $N_0, N_1, N_2, \cdots$ とそのラベル $S_0, S_1, S_2, \cdots$, および w 上の path $t_0, t_1, \cdots$ を, $(M,w,t_{applAX(i)}) \not\models S_i$ となるようにとることができる. ここで $applAX(i)$ とは, S_0 から S_i までの間に AX–KD が適用された回数である.

補題 5.3 より, S_0 の $\to$ の左にある $\mathsf{\AE X}\,\rho$ は, AX–KD を適用されて ρ に変わっては, AU 左か EU 左の適用によって $\mathsf{\AE X}\,\rho$ に戻ることを繰り返す. N' から N_0 への過程における議論と同様にして, 任意の自然数 ℓ に対し, $(M,w,t_\ell) \models \rho$ かつ $(M,w,t_\ell) \not\models \psi$ となる. すなわち, path $t_0, t_1, \cdots$ において, ずっと ρ が真かつ ψ が偽である. $\rho = \mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ であれば, これは論理式の解釈の定義に反する.

一方, $\rho = \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ であれば, path $t_0, t_1, \cdots$ が

上記のようにして取った path であることと, path $t_0, t_1, \cdots$ が任意の自然数 ℓ に対し $(M, w, t_\ell) \models \rho$ を満たすこととは同値であることが, 補題 5.6 を繰り返し適用することにより示せる. しかも, 上記のようにして取った path では, 任意の自然数 ℓ に対し $(M, w, t_\ell) \not\models \psi$ となるので, t_0 から始まる path のうち, ρ が偽にならないうちに ψ が真となるものは存在しない. 従ってやはり論理式の解釈の定義に反する.

以上から, S は valid である. □

6 完全性

本章では $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の完全性を示す. BDI^{K}_{CTL} の完全性も同様に示せる.

まず 6.1 節で, 証明可能でない sequent S を与えたとき, ある $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure を構築するアルゴリズムを与える. 続いて 6.2 節で, この $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure のある世界において S が偽となることを示す.

6.1 $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure の構築アルゴリズム

S を, 証明可能でない sequent とする. 以下の作業を順に行う.

6.1.1 有限木の構築

まず $S = S_0$ とおき, S_0 に次の '手順A' を適用する.

手順A begin

S_0 に Wang のアルゴリズムを準用し, ¬/∨/AU/EU 左·右を可能な限り適用する. その後, もし各 sequent の → の左同士か右同士に同じ論理式が複数回現れていれば, Weak でそれを 1 つに減らす.

手順A end

この結果得られる sequent のうち, 証明可能でないもの全て (1 つ以上有限個) の集合を $\{S'_1, S'_2, \cdots\}$ とおき, そのうち任意の 1 つを S' と置く. S' は, → の左右に原子命題とトップレベルが AX, BEL, DESIRE, INTEND の論理式だけを持ち, しかも → の左同士や右同士に同じ論理式が複数回現れない.

ただ 1 つの要素 w_0 を持つ集合 W と, ただ 1 つの要素 t_0 を持つ集合 St を作る. また, ペア (w_0, t_0) を唯一のノードとする木 T を作り, このノードに第 1 ラベルとして sequent S, 第 2 ラベルとして sequent S' を貼る.

次いで, $w = w_0$, $t = t_0$ と置いて, S' とペア (w, t) に対し, 以下の '手順B' (図 2) を (再帰的に) 実行する.

手順B begin

S' の → の左右が原子命題ばかりであるなら, 何もしない. また, T の根 (w_0, t_0) からノード (w, t) までの経路のどこか (但し (w, t) は含まない) に, 第 2 ラベル S' を持つノードがあるならば, ノード (w, t) に「ループ」というマークを付け, 後は何もしない.

いずれでもなければ, S' に様相論理版の Wang のアルゴリズムを準用する. すなわち, S' に対し以下のいずれかを行って得られる sequent 全ての有限集合を $\{S''_1, \cdots, S''_k\}$ とする.

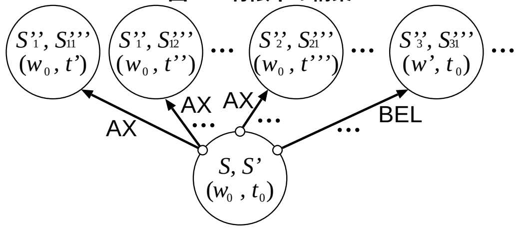
1. Weak で, → の左ではトップレベルが AX の論理式以外を全て消す. → の右では, トップレベルが AX の論理式があれば, そのうち 1 つを残して他を消し, そうでなければ全て消す.
   次いで AX–KD を適用する.
2. Weak で, → の左右それぞれについて, トップレベルが BEL の論理式全てを残し, 他を消す.
   続いて BEL–KD45 を適用する. その際, → の右が空なら Δ, Θ を空とおき, そうでなければ → の右のうち 1 つを Θ, それ以外を Δ と置く.
3. DESIRE, INTEND に対し, 1. と同様のことを行う.

このとき, $S''_1, \cdots, S''_k$ はいずれも証明可能でない. そこで, 各 S''_i $(1 \leq i \leq k)$ に対し, $S_0 = S''_i$ と置いて '手順A' を適用し, sequent $S'''_{i1}, S'''_{i2}, \cdots$ を得る. $S'''_{i1}, S'''_{i2}, \cdots$ はそれぞれ, → の左右に原子命題とトップレベルが AX, BEL, DESIRE, INTEND の論理式だけを持ち, → の左同士や右同士に同じ論理式が複数現れない, 証明可能でない sequent である.

ここで, 各 S'''_{ij} に対し, 以下を行う.

1. $S''' = S'''_{ij}$ と置く.
2. S' から S''_i を得る際に AX–KD, BEL–KD45, DESIRE–KD, INTEND–KD のどれを使ったかによって, 次のいずれかを行う.
   (a) AX–KD を使った場合
   St に新たな要素 t' を加え, T のノード

図 2 有限木の構築



(w,t) に新たな子 (w,t') を作って, それに第 1 ラベルとして sequent S_i'', 第 2 ラベルとして sequent S''' を貼り, 新たな枝に AX というタグを付ける

(直観的には, t から t' に AX による可視関係の枝を張る)

(b) BEL–KD45 を使った場合

W に新たな要素 w' を加え, T のノード (w,t) に新たな子 (w',t) を作って, それに第 1 ラベルとして sequent S_i'', 第 2 ラベルとして sequent S''' を貼り, 新たな枝に BEL というタグを付ける

(直観的には, w から BEL による可視関係で見える新たな可能世界を作る)

(c) DESIRE–KD, INTEND–KD を使った場合

DESIRE, INTEND に対し, 2(b) と同様のことを行う

3. 次いで, 今新設したノードを改めて (w,t) と置き, S''' を改めて S' と置いて, '手順B' を再帰的に呼び出す.

手順B end

どの段階においても, S' は, S に含まれる論理式の部分論理式 (その中に $\mathsf{A}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$ がある場合は $\mathsf{AX}\,\mathsf{A}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$ を含み, また $\mathsf{E}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$ がある場合は $\mathsf{EX}\,\mathsf{E}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$, $\mathsf{AX}\neg\mathsf{E}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$, $\neg\mathsf{E}(\phi \ \mathsf{U} \ \psi)$ を含む) のみからなり, しかも $\rightarrow$ の左同士や右同士に同じ論理式はない. 従って S' の可能性は有限通りしかない. また, 1 つの S' に対する S_i'' の可能性も有限個しかない. 従って '手順B' は有限の手間で止まる.

このとき, T は W の要素と St の要素のペアをノードとする有限木で, 各ノードには sequent のラベルが 2 つ貼られており, 各枝には AX, BEL, DESIRE, INTEND のいずれかのタグが付いている. また, 一部の葉には「ループ」というマークがつく.

6.1.2 枝刈り

T に対し, 以下の作業を可能な限り繰り返す.

1. 「ループ」や「行き止まり」のマークが付いていないノードで, しかも次のいずれかの条件

   (a) 葉である

   (b) 子のノードに全て「行き止まり」マークが付いている

   を満たすものがあれば, それに「行き止まり」マークを付ける

2. 「行き止まり」マークの付くノード N があり, N と同じ親および同じ第 1 ラベルを持つノード N' $(\neq N)$ があれば, N' を削除 (N' への枝, および N' 以下の部分木も含む)

木の有限性から, この操作は必ず停止し, その結果, 同じ第 1 ラベルを持つ兄弟ノードは「行き止まり」マークの付くもののみ 1 個か, 付かないもののみ 0 個以上のいずれかになる. また, この操作の後も T は木である.

6.1.3 ループ枝の融合

以下の全ての条件

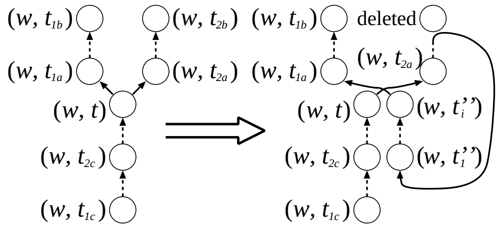
- $(w,t_{1a}), (w,t_{2a})$ は同じ親 (w,t) および同じ第 1 ラベルを持つノードで, $t_{1a} \neq t_{2a}$
- $(w,t_{1b}), (w,t_{2b})$ は「ループ」マークのある葉ノードで, (w,t_{1b}) は (w,t_{1a}) の, (w,t_{2b}) は (w,t_{2a}) の子孫
- (w,t_{1c}) は (w,t_{1b}) と, (w,t_{2c}) は (w,t_{2b}) と同じ第 2 ラベルを持つノードで, (w,t_{1c}) は (w,t_{2c}) の, (w,t_{2c}) は (w,t) の先祖

を満たすノード (w,t), (w,t_{1a}), (w,t_{2a}), (w,t_{1b}), (w,t_{2b}), (w,t_{1c}), (w,t_{2c}) が存在する限り, 以下の '手順C' (図 3) を繰り返す.

手順C begin

まず, (w,t_{2c}) から (w,t) までの経路のコピーを作る. すなわち, (w,t_{2c}) から (w,t) までの経路のノードが $(w,t_1'), \cdots, (w,t_i')$ であるとする (ここで $t_1' = t_{2c}$, $t_i' = t$) と, St に新たな要素 $t_1'', \cdots, t_i''$ を増やし, $(w,t_1'), \cdots, (w,t_i')$ とそれぞれ同じ第 1・2 ラベルを持つノード $(w,t_1''), \cdots, (w,t_i'')$ を作って (w,t_1'')

図 3　ループ枝の融合



から (w, t''_2) へ, $\cdots$, (w, t''_{i-1}) から (w, t''_i) へタグ AX を持つ枝を張る．また, ノード $(w, t''_1), \cdots, (w, t''_i)$ に「コピー」のマークを付ける．

次いで, (w, t''_1) の第 1 ラベルのみ, (w, t_{2b}) のそれと同じに変更する．但し (w, t''_1) に「ループ」のマークは付けない．

最後に, (w, t_{2b}) の親から (w, t''_1) へ, および (w, t''_i) から (w, t_{1a}) へタグ AX を持つ枝を張り, (w, t_{2b}) の親から (w, t_{2b}) へ, および (w, t) から (w, t_{1a}) への枝と, ノード (w, t_{2b}) を削除する．

手順C end

直観的にはこの操作は, タグ AX の枝からなるループ全てを含むグラフの各連結成分を, それと同等な枝を全て持つ単一のループに置き換える．

‘手順C’ 1 回あたり, 条件を満たす箇所が 1 つ減るので, 繰り返しは必ず停止する．この操作の後も T は木であり, また, 1 つのノードから出る, タグ AX を持つ枝で, その先のノードの第 1 ラベルが同じものは高々1 つになる．特に,「コピー」のマークを持つノードの子はただ 1 つである．

その後,「コピー」のマークのある各ノード N に対し, その祖先で N と同じ第 2 ラベルを持ち「コピー」マークのないノード N' (必ず存在する) を選び, N の「コピー」のマークを外し, N' 以下の部分木 (但し, N の子と同じ第 1 ラベルを持つ N' の子と, それへの枝, およびそれ以下の部分木を除く) を, 必要なら W や St の要素を増やしつつ, N 以下へコピーする．このとき, コピーした部分木においても, ノード (w_1, t_1) からその子ノード (w_2, t_2) への枝のタグが AX であれば $w_1 = w_2$, そうでなければ $t_1 = t_2$ となるようにする．また, コピー元の部分木の中にさらに「コピー」のマークを持つノードがあれば, 先に再帰的に同様のコピーを行う．この再帰のネストは, 高々‘手順C’ を行った回数なので, この操作は有限で停止する．

6.1.4　$(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure の構築

以下のような tuple $M = \langle W, \{St_w \mid w \in W\}, \{R_w \mid w \in W\}, L, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\rangle$ を作る．

- 各 $w \in W$ に対し, $St_w = \{t \in St \mid T$ がノード (w, t) を持つ $\}$
- 各 $w \in W$ に対し, $R_w = \{(t, t') \mid T$ は (w, t) から (w, t') へのタグ AX の枝を持つ $\}$
- 各 $w \in W$, $t \in St_w$ に対し, $L(w, t)$ はノード (w, t) の第 2 ラベルである sequent の $\rightarrow$ の左に現れる原子命題全ての集合
- 各 $w, w' \in W$, $t \in St_w$ に対し, $\mathcal{B} = \{(w, t, w') \mid T$ は (w, t) から (w', t) へのタグ BEL の枝を持つ $\}$
- $\mathcal{D}, \mathcal{I}$ に対しては同様

次に, T の根からそれぞれの葉 L への経路のうち, 途中 (葉を除く) に葉と同じ第 2 ラベルを持つノード N があるもの全てについて, L の直前のノード N' から L への枝のタグが何であるかに応じて以下のいずれかを行う．

- タグが AX ならば, 補題 5.2 よりある w, t, t', t'' が存在して $N' = (w, t')$, $L = (w, t)$, $N = (w, t'')$ と書けるので, R_w から (t', t) を削除し (t', t'') を加え, St_w から state t を削除
- BEL ならば, 補題 5.2 よりある w, t, t', t'' が存在して $N' = (w', t)$, $L = (w, t)$, $N = (w'', t)$ と書けるので, $\mathcal{B}$ から (w', t, w) を削除し (w', t, w'') を加え, W から可能世界 w を削除
- DESIRE, INTEND であることは, 補題 5.2 からない

ここで, $t\,R_w\,t'$ を満たす t' の存在しないような全ての w と t に対し, (t, t) を R_w に加える．この場合, T のノード (w, t) の第 1・2 ラベルの $\rightarrow$ の左右には AX をトップレベルに持つ論理式はないことに注意．また, $(w, t, w') \in \mathcal{B}$ を満たす w' が存在しないような全ての w と t に対し, (w, t, w) を $\mathcal{B}$ に加える．この場合も BEL について同様の注意が成り立つ．$\mathcal{D}, \mathcal{I}$ についても同様の操作を行う．

最後に, 3.1 節の条件 (**B-*4***) や (**B-*5***) を満たさない w, w', w'' がある間, (w, t, w'') を $\mathcal{B}$ に加える (世界や

state は有限個なので有限の手間で済む). そのような (w, t, w'') を 1 つ $\mathcal{B}$ に加える前に, 性質

> $(w, t, w') \in \mathcal{B}$ ならば, T のノード (w, t) の第 2 ラベルの $\rightarrow$ の左に現れる全ての BEL(ϕ) に対し, ノード (w', t) の第 1 ラベルの $\rightarrow$ の左には BEL(ϕ) と ϕ が現れる

が満たされているならば, 1 つ加えた後にもこの性質が満たされるので, この操作が全て済んだ後も, この性質は満たされている.

これにより M は $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure になる.

6.2　完全性の証明

定理 6.1　体系 $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ は完全である.

証明　sequent S が証明可能でないとする. 6.1 節のアルゴリズムで作られた $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure M は以下の性質を持つ.

> $S_w \ni t$ とする. '手順B' で T のノード (w, t) を生成した段階での S''_i から S'''_{ij} に至る過程 (但し $w = w_0$, $t = t_0$ の場合は S から S' に至る過程) のどの sequent に対しても, その $\rightarrow$ の左に現れる論理式は (M, w, t) で真であり, 右に現れる論理式は (M, w, t) で真でない.

これを示すには, 論理式の構造に関する帰納法を, M の全ての state に対して同時並行で適用すればよい. 特に, A(ϕ U ψ), E(ϕ U ψ) に関しては次のように示せる.

- $\rightarrow$ の左の A(ϕ U ψ) $\cdots$ もしこれが偽なら, T の作り方から, (M, w, t) で始まるある path で, ずっと ϕ が真, ψ が偽となる. このとき, T のあるノード N とその子孫の葉ノード N' で, N から N' までの経路のノードの第 1 ラベルの $\rightarrow$ の左に常に A(ϕ U ψ) があり, しかもその経路の枝が全てタグ AX を持つものがある. すると, N の第 1 ラベルには, 終局性論理式 A(ϕ U ψ) を持つ導出のループを含む証明が存在することになり, 矛盾する.
- $\rightarrow$ の左の E(ϕ U ψ) $\cdots$ 同様.
- $\rightarrow$ の右の A(ϕ U ψ) $\cdots$ これに対しどこかで AU 右が適用されている. その次の sequent が AU 右の前提の左だとすると, 帰納法の仮定から ϕ も ψ も (M, w, t) で偽なので A(ϕ U ψ) も偽. 一方, 右だとすると, 同じ理由で ψ は (M, w, t) で偽. また, $t\,R_w\,t'$ を満たすある (w, t') があって, それに対応するノードの生成中に, sequent の $\rightarrow$ の右に A(ϕ U ψ) が現れている. これに同様の議論を適用して, (M, w, t') で ϕ も ψ も偽か, あるいは ψ が偽でかつ $t'\,R_w\,t''$ を満たすある (w, t'') があって, 同じ議論が繰り返せる. すなわち, t で始まる w 上のある path があって, ずっと ψ が偽か, あるいはあるところで ϕ が偽でかつそこまでずっと ψ が偽である. 従って (M, w, t) で A(ϕ U ψ) は偽.
- $\rightarrow$ の右の E(ϕ U ψ) $\cdots$ 同様.

従って, 特に $(M, w_0, t_0) \not\models S$ である. よって, S は恒真でない. □

7　判定アルゴリズム

6 章で示したアルゴリズムを, 証明可能な sequent に対しても適用すれば, sequent の証明可能性の判定アルゴリズムが得られる.

与えられた sequent S に Wang のアルゴリズムを準用し, ¬/∨/AU/EU 左·右を可能な限り適用する. その後, もし各 sequent の $\rightarrow$ の左同士か右同士に同じ論理式が複数回現れていれば, Weak でそれを 1 つに減らす.

この結果得られる sequent のうち, 様相オペレータを持たないか, S からの過程で既に現れている sequent と同じものについては何もせず, それ以外の各 sequent S' に対し, 6.1.1 節の '手順B' と同様に, 様相論理版の Wang のアルゴリズムを準用する. 得られた各 sequent S''_i に対し, S と同様に Wang のアルゴリズムを準用することを繰り返す.

こうして, 定義 4.4 の条件を満たす推論木が作れれば S は証明可能である. また, できなければ, 有限の手間でこの操作は行き詰まり, 証明可能でないとわかる.

現在, このアルゴリズムの Prolog によるインプリメントが動作している (`ftp://ftp.ics.nara-wu.ac.jp/pub/nide/research/bdi-1.00.tgz`).

8 今後の課題

複数のエージェントに関する BDI [5] をもつ logic への拡張も, エージェントの quantifier を入れなければ直ちに行えるだろう. また, mutual belief [5] のように, BDI オペレータの無限ネストに相当するオペレータを持つ体系に関しても, 本稿の AU/EU に対する取り扱いと同様の手法によって, 演繹体系を作れると考えられる. これらを導入できれば, マルチエージェントシステムの BDI logic を用いた仕様記述や検証に有効であろう. さらに, $\mathsf{DESIRE}(\phi) \supset \mathsf{BEL}(\mathsf{DESIRE}(\phi))$ など, 合理的エージェントに要求される心的状態の整合性公理[2] [3] の導入も検討を要する. それらは今後の課題である.

エージェントの quantifier に関する取り扱いや, また, 現時点ではまだ, ベースが命題論理の CTL に限定されているので, これを CTL* や述語論理に拡張できるかどうかも今後の検討課題である.

参考文献

[1] Emerson, E. A. and Srinivasan, J.: Branching Time Temporal Logic, *Linear Time, Branching Time and Partial Order in Logics and Models for Concurrency*(de Bakker, J., de Roever, W., and Rozenberg, G.(eds.)), Springer-Verlag, 1989, pp. 123–172.

[2] Rao, A. S. and Georgeff, M. P.: Modeling Rational Agents within a BDI-Architecture, *Proc. of International Conference on Principles of Knowlegde Representation and Reasoning*, 1991, pp. 473–484.

[3] Rao, A. S. and Georgeff, M. P.: Decision Procedures for BDI Logics, *Journal of Logic and Computation*, Vol. 8,No. 3(1998), pp. 292–343.

[4] Singh, M. P., Rao, A. S., and Georgeff, M. P.: Formal Methods in DAI: Logic-Based Representation and Reasoning, *Multiagent Systems*, The MIT Press, 1999, pp. 331–376.

[5] Wooldridge, M.: *Reasoning about Rational Agents*, The MIT Press, 2000.

[6] 高田司郎, 五十嵐新女, 新出尚之, 榎本美香, 間瀬健二, 中津良平: マルチエージェント環境において意図的に言語行為を遂行する合理的エージェントの基本設計, **電気情報通信学会論文誌**, Vol. J84-D-I,No. 8(2001), pp. 1191–1201.

[7] 萩谷昌己: **ソフトウェア科学のための論理学**, 岩波講座 ソフトウェア科学 11, 岩波書店, 1994.