

# 1/f ゆらぎによるセルオートマトンの進化

Evolution of Cellular Automata by 1/f Noise

蛸川 繁

Shigeru Ninagawa

金沢工業大学 情報工学科

Division of Information and Computer Science, Kanazawa Institute of Technology

We performed the evolution of two-dimensional cellular automata by genetic algorithms from the power spectral point of view. Power spectrum is calculated from the evolution of the state of a cell. We calculate the exponent and the residual sum of squares of the power spectrum by using least square fitting of the power spectrum. Fitness is calculated from the exponent and the residual sum of squares. Closer to the 1/f noise the power spectrum is, higher the fitness becomes. The rule which has the third highest fitness in the experiment behaves like the Game of Life.

## 1. はじめに

ライフゲームは 2 次元 2 状態 9 近傍セルオートマトンの一種であり、あるセルの状態を  $s$  とし、そのセルの周囲 8 セルのうち状態が 1 のセル数を  $i$  とすると、次の時刻でのセルの状態を示す状態遷移関数  $d(s, i)$  は次のように表される。

$$d(0, 3) = d(1, 2) = d(1, 3) = 1 \\ \text{otherwise } d = 0 \quad (1)$$

遷移規則はこのように単純であるにもかかわらず、ライフゲームには、セル平面上を伝播する「グライダー」と呼ばれるパターンをはじめ、種々の興味深いパターンが存在することが知られている [Poundstone 84]。さらに、グライダー列をデジタル信号とみなすことにより、セル平面上に論理演算回路やレジスタ等を構成できることから、じゅうぶん広いセル平面上で汎用コンピュータを作ることができると予想されている [Berlekamp 82]。

いっぽう、ライフゲームにおいて、ランダムな初期様相から状態遷移させ、セルの時系列データからパワースペクトルを求めると、1/f ゆらぎを示すことが知られている [Ninagawa 98]。1/f ゆらぎはパワースペクトルが周波数  $f$  に反比例することからその名がつけられたが、1925 年に真空管を流れる電流において初めて報告されて以来、種々のシステムや現象において観測されているにもかかわらず、その発生のメカニズムには未だに不明の点が多い。

以上のことから、セルオートマトンにおける 1/f ゆらぎと計算万能性との間には何らかの関連性があることが予想されるが、1/f ゆらぎを示すセルオートマトンはあまり知られていないので、この予想を検証するためには、そのようなセルオートマトンを探し出し、それらのセル平面上で計算機が構成できることを示す必要がある。そこで、本研究では 1/f ゆらぎを示すセルオートマトンを探索することを目的とする。ライフゲームのような 2 次元 2 状態 9 近傍外総和型のセルオートマトンは全部で  $2^{18} \approx 2.62 \times 10^5$  種類あり、全数探索は不可能なので、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithms; GA) を用いる。本研究のように、GA を用いて目的の振る舞いを示すセルオートマトンを探索する研究としては、初期様相の密度を分

類できる 1 次元 2 状態 7 近傍セルオートマトンを探索する研究 [Mitchell 93, Mitchell 94] があり、現在までに知られているセルオートマトンのなかでは最良の「GKL ルール」とよばれるセルオートマトンに近い振る舞いをするものが得られている。

## 2. 適合度の計算

与えられたセルオートマトンにおいて、ある初期様相から遷移規則にしたがい、 $T$  ステップにわたって状態遷移を行う。時刻  $t$  における位置  $(x, y)$  のセルの状態を  $s_{x,y}(t)$  とすると、次式によりセル  $(x, y)$  のパワースペクトル  $\hat{s}_{x,y}(f)$  を求める。

$$\hat{s}_{x,y}(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} s_{x,y}(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}) \\ (f = 0, 1, \dots, T/2).$$

これを次式のように全セルにわたって和をとり、パワースペクトル  $S_f$  を求める。

$$S_f = \sum_{x,y} |\hat{s}_{x,y}(f)|^2. \quad (2)$$

本研究では、セル空間は縦 × 横 = 100 × 100 個のセルからなり、初期様相は 0,1 の状態が等確率で出現するようにランダムに生成し、境界条件としてセル平面が 2 次元トーラスとなる周期境界条件を用いている。T=8000 の場合のライフゲームのパワースペクトルを図.1 に示す。パワーが周波数に反比例する 1/f ゆらぎを示していることがわかる。

GA を適用するためには、遷移規則に対して、適合度を求める必要がある。そこで、(2) 式によって得られたパワースペクトルの周波数域  $f = 1 \sim f_b$  に対して、最小 2 乗法を用いて  $\ln(S_f) = \alpha + \beta \ln(f)$  と近似し、式 (3) により残差平方和  $\sigma^2$  を求める。

$$\sigma^2 = \sum_{f=1}^{N_r} \frac{(\ln(S_f) - \alpha - \beta \ln(f))^2}{N_r}. \quad (3)$$

ここで、 $N_r$  は  $\sigma^2$  を求める際に用いるデータ数である。さらに式 (4) より、適合度  $F$  を求める。

A: 金沢工業大学情報工学科, 石川県石川郡野々市町扇が丘 7-1, ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

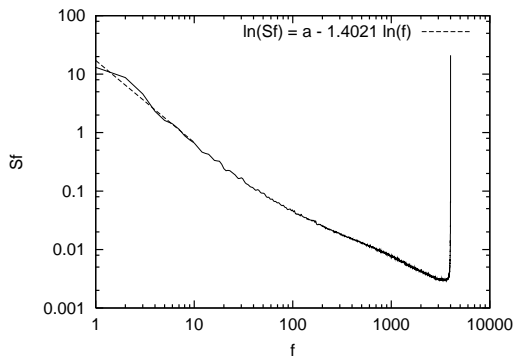


図 1: ライフゲームのパワースペクトル．点線は  $f = 1 \sim 10$  において最小 2 乗法で近似した直線  $\ln(S_f) = \alpha + \beta \ln(f)$ ,  $\beta = -1.4021$  .

$$F = \frac{|\beta|}{\sigma^2 + \delta}. \quad (4)$$

ここで,  $\delta = 1 \times 10^{-6}$  は分母がゼロになることを避けるための項である．このように適合度を定めることによって, パワースペクトルが  $1/f$  ゆらぎに近い個体ほど大きな適合度をもつ．

### 3. 実験

本研究で対象となるセルオートマトンは, 自分自身のセルの状態と周囲のセルにおける種々の状態のセルの個数だけで次の時刻での状態が決まる外総和型 (outer totalistic) とよばれるものである．2 次元 2 状態 9 近傍外総和型セルオートマトンの遷移関数  $d$  は次式で表現される．

$$d(0, i) = x_{2i}, \quad d(1, i) = x_{2i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, 8). \quad (5)$$

ここで  $d$  の第一引数は自セルの状態を示し,  $i$  は周囲 8 セルのうち, 状態が 1 のセル数を表す．本研究では  $d(0, 0) = 0$  という遷移規則のみを対象とするので, 遷移規則は 17 ビット  $x_{17}x_{16}\dots x_1$  で表現することにする．この記法では, ライフゲームの遷移規則は 00000000001110000 となる．

1 セルが取り得る状態数を  $K$  とすると  $\lambda = 0$  がもっとも均質なルールとなり,  $\lambda = 1 - 1/K$  はもっとも不均質なルールを表す．そこで, 初期集団として用いる遷移規則は  $1/18 \leq \lambda \leq 9/18$  をみたくように, ランダムに生成する．

ライフゲームにおいてランダムな初期様相から状態遷移させると, 多くの場合に周期 2 および 3 の周期的に変動するパターンのみが残る．したがって, ライフゲームにおいては様相が周期 6 になることによって安定状態になったことがわかる．セル数が  $100 \times 100$  の周期境界条件を用いた場合, 安定状態になるまでの平均過渡ステップ数は約 2000 であることがわかっている [蛭川 01]．さらに  $1/f$  ゆらぎの持続ステップ数はその約 3.6 倍となる [蛭川 02] .

そこで最低でも 7200 ステップ程度に渡りパワースペクトルを求める必要があるが, そのためには膨大な計算時間が必要となる．そこで, ランダムに生成した初期集団に対し,  $T = 1024$  の場合にパワースペクトルを求め, 最小 2 乗法を用いて  $f = 1 \sim 400$  にわたって  $S(f) = af^b$  と近似し,  $b \leq -0.3$  となる遷移規則だけを取り出す．こうすることによってあらかじめ,  $1/f$  ゆらぎから大きくはずれたものを除外することができる．

こうして得られた遷移規則を 140 個まとめて 1 集団とし,  $T = 8000$  としてパワースペクトルから, 先ほどと同様に  $b$  と  $\sigma^2$  を求める．本研究ではライフゲームよりも長いステップに渡り  $1/f$  ゆらぎを示すセルオートマトンを見つけることを目指しているので  $T = 8000$  とした．また,  $b$  については, 低周波域での振る舞いを調べるために  $f_b = 10$  とし,  $\sigma^2$  については, スペクトル全体が  $1/f$  ゆらぎに近いかどうか調べるために,  $N_r = 3000$  とする．選択はルーレット選択 (エリート数は 10) とし, 交叉確率 0.6 の一様交叉とし, ビット当たりの突然変異確率は 0.03 とした．図.1 に示されたパワースペクトルから求めたライフゲームの適合度は  $193.14$  ( $b = -1.4021$ ,  $\sigma^2 = 7.258 \times 10^{-3}$ ) だった．

### 4. 実験結果

現在のところ 30 通りの初期集団に対して合計 1170 世代まで実験が進んでいる．

現在までに得られた遷移規則の中で, もっとも高い適合度  $996.09$  ( $b = -0.5866$ ,  $\sigma^2 = 5.879 \times 10^{-4}$ ) をもつ遷移規則 01000011101110000 (F1 とよぶ) と, 次に高い適合度  $661.18$  ( $b = -0.2819$ ,  $\sigma^2 = 4.254 \times 10^{-4}$ ) をもつ遷移規則 10110110000110100 (F2 とよぶ) のパワースペクトルを図.2 (上), 図.3 (上) にそれぞれ示す．しかし, これらのパワースペクトルは低周波域で傾き  $\beta$  がいずれも 0 に近いいため,  $1/f$  ゆらぎとはいえない．また, 同じ初期様相を用いた場合の 1000 ステップにおける様相を図.2 (下), 図.3 (下) にそれぞれ示す．F1 にはライフゲームのグライダーのような伝播するパターンはなく, F2 には 7 種類の伝播パターンが存在する [Eppstein] .

3 番目に高い適合度  $573.85$  ( $b = -1.0508$ ,  $\sigma^2 = 1.830 \times 10^{-3}$ ) をもつ遷移規則 01010000001110000 (F3 とよぶ) のパワースペクトルを Fig.4 (上) に示す．このパワースペクトルは低周波域で傾き  $\beta$  が  $-1$  に近いことから  $1/f$  ゆらぎといえる．1000 ステップにおける様相を図.4 (下) に示す．F3 の遷移規則は  $d(0, 8) = d(0, 7) = 1$  である点を除けばライフゲームと同じである．これらの違いは近傍における状態 1 の密度が極めて高い場合にしか, 影響をおよぼさないので, ライフゲームと同じような振る舞いをする．事実, この遷移規則ではライフゲームと同じグライダーが観測された．

### 5. おわりに

本研究ではセルオートマトンのパワースペクトルが  $1/f$  ゆらぎに近いほど, 高い値をとる適合度を用いることによって,  $1/f$  ゆらぎを示すセルオートマトンを見つけることが出来た．特に, 3 番目に高い適合度をもつ遷移規則は, ライフゲームに極めて近い振る舞いをする事がわかった．このことは, セルオートマトンにおける計算万能性と  $1/f$  ゆらぎの関係を示唆しているといえる．

今後は, 試行回数を増やすとともに, もっとも高い適合度をもつが必ずしも,  $1/f$  ゆらぎに近いとはいえないことから, 適合度については, 特に低周波域での振る舞いを反映するように修正する必要があると思われる．

謝辞 本研究は統計数理研究所共同研究プログラム (17-共研-0007) に基づいて行われた．

### 参考文献

[Poundstone 84] Poundstone, W.: The Recursive Universe, William Morrow & Co (1984), (邦訳: ウィリアム・パウ

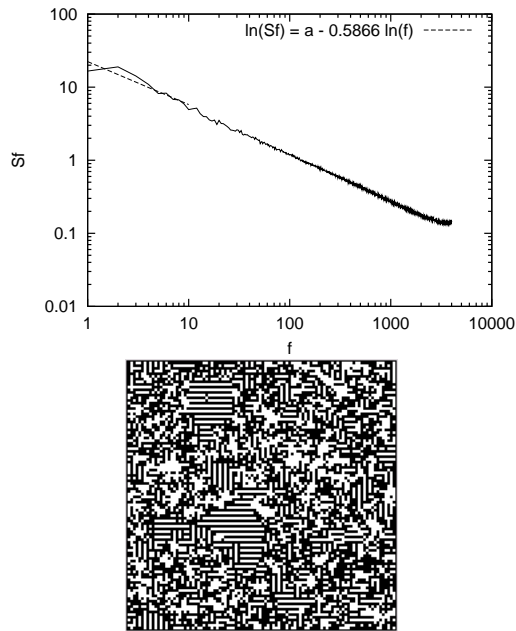


図 2: 最高適合度 996.09 をもつ遷移規則 01000011101110000 のパワースペクトル(上). 点線は  $f = 1 \sim 10$  において最小 2 乗法で近似した直線  $\ln(S_f) = \alpha + \beta \ln(f), \beta = -0.5866$ . 1000 ステップ目の様相(下). 白のセルは状態 0, 黒のセルは状態 1 を表す.

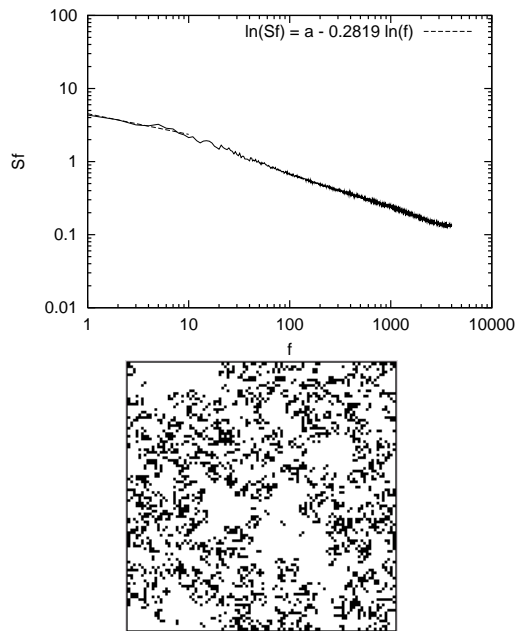


図 3: 2 番目に高い適合度 661.18 をもつ遷移規則 P10110110000110100 のパワースペクトル(上). 点線は  $f = 1 \sim 10$  において最小 2 乗法で近似した直線  $\ln(S_f) = \alpha + \beta \ln(f), \beta = -0.2819$ . 1000 ステップ目の様相(下).

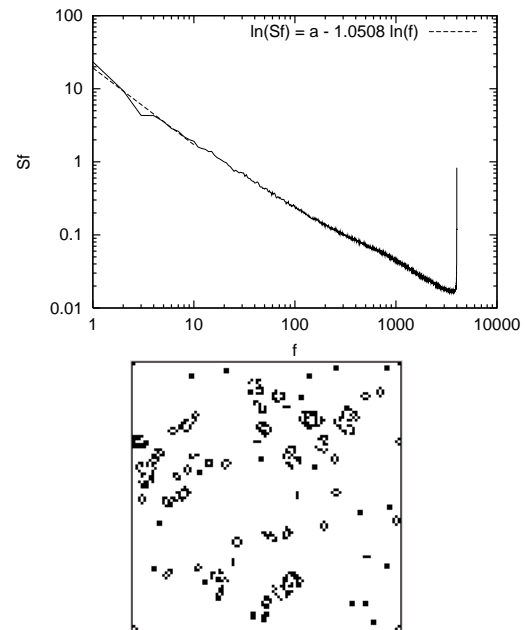


図 4: 2 番目に高い適合度 573.85 をもつ遷移規則 01010000001110000 のパワースペクトル(上). 点線は  $f = 1 \sim 10$  において最小 2 乗法で近似した直線  $\ln(S_f) = \alpha + \beta \ln(f), \beta = -1.0508$ . 1000 ステップ目の様相(下).

ンドストーン著 有澤誠訳: ライフゲームの宇宙「新装版」, 日本評論社 (2003)).

[Berlekamp 82] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., and Guy, R. K.: Winning ways for your mathematical plays, Vol.2, Academic Press (1982).

[Ningawa 98] Ningawa, S., Yoneda, M., and Hirose, S.:  $1/f$  fluctuation in the "Game of Life", Physica D, Vol.118, pp. 49 - 52 (1998).

[Mitchell 93] Mitchell, M., Hraber, P. T., and Crutchfield, J. P.: Revisiting the Edge of Chaos: Evolving Cellular Automata to Perform Computations, Complex Systems, Vol.7, pp. 89 - 130 (1993).

[Mitchell 94] Mitchell, M., Crutchfield, J.P., and Hraber, P. T.: Evolving Cellular Automata to Perform Computations: Mechanisms and Impediments, Physica D, Vol.75, pp. 361 - 391 (1994).

[蛭川 01] 蛭川繁, 米田政明, 広瀬貞樹: ライフゲームにおける過渡現象のセル数依存性, 人工知能学会論文誌, 1Vol.6, pp. 164 - 166 (2001).

[蛭川 02] 蛭川繁: ライフゲームにおける  $1/f$  ゆらぎと過渡現象, 情報処理学会論文誌, Vol.43, pp. 2017 - 2020 (2002).

[Eppstein] <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/ca/>