

2次元セルラーオートマトン上での 最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムについて

A Design of Generalized Optimum-Time Firing Squad
Synchronization Algorithm for Two-Dimensional Cellular Arrays

寺岡 正人^{*1} 久岡 雅也^{*1} 前田 雅史^{*2} 梅尾 博司^{*1}
Masato Teraok Masaya Hisaoka Masashi Maeda Hiroshi Umeo

^{*1}大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻 ^{*2}(株)大真空
Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering Daishinku, Inc.

In recent years cellular automata (CA) have been establishing increasing interests in the study of modeling real phenomena occurring in biology, chemistry, ecology, economy, geology, mechanical engineering, medicine, physics, sociology, public traffic, etc. Cellular automata are considered to be a nice model of complex systems in which an infinite one-dimensional array of finite state machines (cells) updates itself in synchronous manner according to a uniform local rule. The synchronization in cellular automata has been known as firing squad synchronization problem since its development, in which it was originally proposed by J. Myhill to synchronize all parts of self-reproducing cellular automata [9]. The firing squad synchronization problem has been studied extensively for more than 40 years [1-20]. The present authors are involved in research on firing squad synchronization algorithms on two-dimensional (2-D) cellular arrays. In this paper, we propose a new optimum-time generalized synchronization scheme that can synchronize any $m \times n$ array in $m + n + \max(m, n) - \min(r, m - r + 1) - \min(s, n - s + 1) - 1$ optimum steps, where (r, s) is the general's initial position.

1. はじめに

1957年, Myhillによりセルラーオートマトン上での同期問題として一斉射撃問題 (Firing Squad Synchronization Problem, FSSP と略す) が提唱された。セル間の局所通信のみでセル空間全域を同期に導く問題が研究者の興味を引き、これまでに多くの研究がなされている [1-20]。2次元セルラーオートマトン上では, 代表的な一般化一斉射撃アルゴリズムとして, Szwerinski [14] による最適時間で動作するアルゴリズムが知られているが, それを実現するためにセルラーオートマトンの内部状態が25600と非常に大きい。本稿では, Szwerinski [14] とは異なった制御手法を用いた同期アルゴリズムを提案する。

2. 2次元セルラーオートマトン上での一斉射撃問題

2.1 セルラーオートマトン

2次元セルラーオートマトンとは2次元格子状にセルと呼ばれる有限オートマトンを配置したものであり, 図1のように m 行 n 列に位置するセルを C_{mn} と表記する。また, 各セルは有限の内部状態と隣接する上下左右のセルとの間に通信経路を持つ。セルは自分の内部状態と隣接するセルの内部状態を基に遷移規則集合を参照し自分自身の内部状態を変化させる。全セルは同時に状態遷移を行い, 1度の状態遷移に必要な時間を1ステップと呼ぶ。

2.2 一般化一斉射撃問題

一斉射撃問題とはセルラーオートマトンでの同期問題である。局所的な通信のみを利用してセル空間全体の同期をとることが目的である。時刻 $t=0$ において将軍状態と呼ばれるセルを1つ配置する。このセルから同期を取るための信号を周りのセルへ伝達していき, 未来の時刻 $t=\alpha$ に全セルが同じ状態へと遷移するように遷移規則を作成することである。初期状態で将軍より伝達させる信号が到達するまで各セルは静止状態と

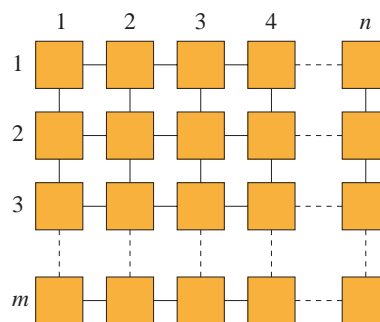


図1: 2次元セルラーオートマトン

いう状態となり, 最終的に同期が完了したときになる状態を射撃状態と呼ぶ。この射撃状態は同期完了のとき1度だけ遷移する状態であり, それまでに射撃状態に遷移してはならない。通常, 一斉射撃問題は将軍状態のセルを左上の端に配置し遷移規則を作成していくものだが, 将軍を配置する位置をセル空間の任意の位置に変更できるようにすることを一般化一斉射撃問題と呼び, そのためのアルゴリズムを一般化一斉射撃アルゴリズムと呼ぶ。

2.3 最適時間一斉射撃アルゴリズム

一斉射撃アルゴリズムにおいて同期完了までに必要な時間はアルゴリズムによって異なる。将軍状態のセルがセル空間の全セルの状態を把握するのに必要な時間が同期に必要な最低限の時間となる。この時間を最適時間と呼び, これよりも早い時間ではセル空間を同期に導くことはできない。サイズ $m \times n$ のセル空間において将軍を左上に配置した場合の最適動作時間は, $t = m + n + \max(m, n) - 3$ となる。将軍を任意の位置 (r, s) に配置した場合, 一般化一斉射撃アルゴリズムの最適動作時間: $T(m, n, r, s)$ は, $T(m, n, r, s) = m + n + \max(m, n) -$

$\min(r, m - r + 1) - \min(s, n - s + 1) - 1$ となる。ここで r, s はそれぞれ、 $1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$ となる任意の整数である。

3. 最適時間一般化一斉射撃アルゴリズム

本節では、新しい制御手法に基づく最適時間で動作する 2 次元一般化一斉射撃アルゴリズムを示す。2 次元一般化一斉射撃アルゴリズムについては、Szwierinski [14] が $m + n + \max(m, n) - \min(r, m - r + 1) - \min(s, n - s + 1) - 1$ ステップで動作するアルゴリズムを示し、これが最適なものであることを示している。ここで 2 次元アレイのサイズを $m \times n$ とし、 $t = 0$ における将軍の位置を (r, s) とする。但し、 $1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$ である。

新しく提案するアルゴリズムは、サイズ $m \times n$ の 2 次元アレイを m 個の長さ n の 1 次元アレイ及び、 n 個の長さ m の 1 次元アレイから構成されると考え、それぞれの行及び列上で従来から知られている 1 次元一般化一斉射撃アルゴリズムを利用するものである。1 次元一般化一斉射撃アルゴリズムについては、Moore and Langdon [10], Settle and Simon [12], Szwierinski [14], Umeo, Hisaoka, Michisaka, Nishioka and Maeda [17], Varshavsky [18] らにより次のようなことが明らかにされている。

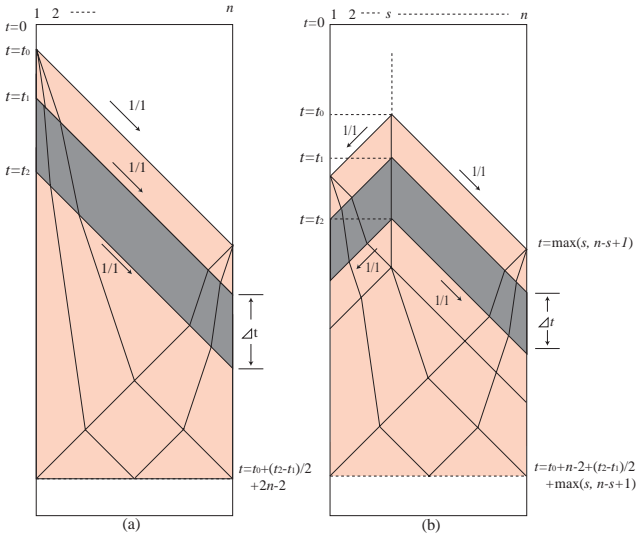


図 2: 時間空間図式

[定理 1] [10,12,14,17,18] N を任意の 1 次元最適時間一斉射撃アルゴリズムを実行するセルラーオートマトンとする。 $t = 0$ 時にセル C_s に将軍を配置したとき、 N は $T(s, n) = n - 2 + \max(s, n - s + 1)$ ステップで n 個のセルからなるセル空間を同期に導く。またこの時間計算量 $T(s, n)$ は最適である。

次の [補題 2, 3] は有用である。

[補題 2] A を任意のセルラーオートマトンとする。 t_1, t_2, l を次の条件を満足する正整数とする。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2l, l \geq 1, t_2 \geq t_1 \geq 0. \quad (1)$$

時刻 $t = t_1, t_2$ において C_1 に特別な信号を与えることにより、 A の動作を漸近的に l ステップ遅延させ、 A の計算状況を

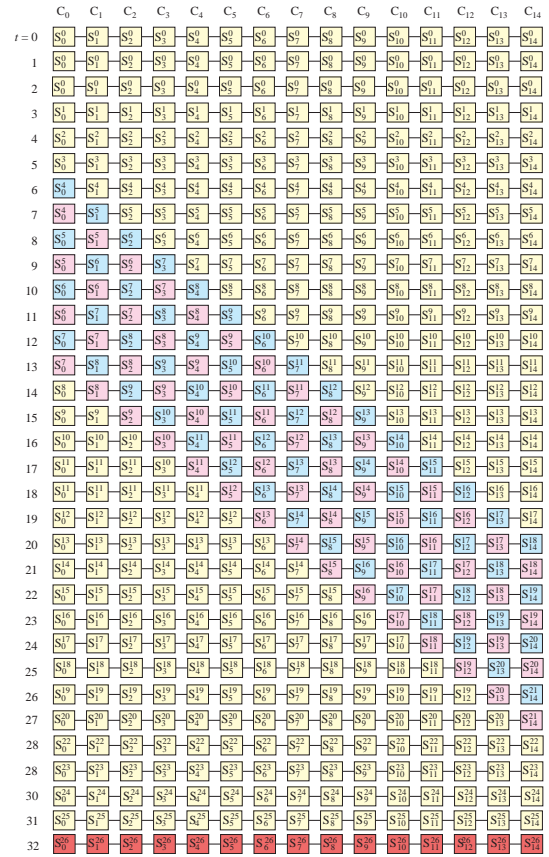


図 3: A' 空間状態遷移図

生成するセルラーオートマトン A' が存在する。 A の内部状態数を k とすると、 A' の内部状態数は $O(k^2)$ となる。さらに A を時間計算量 $T(n)$ ステップで動作する一斉射撃アルゴリズムを実行するセルラーオートマトンと仮定する。 A' は時刻 $t = t_0$ に C_1 に将軍状態を生成するものとする。 t_0, t_1, t_2, l を

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2l, l \geq 1, t_2 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0 \quad (2)$$

$$t_1 + t_2 - 2t_0 \leq 2T(n) - 2(n - 1) \quad (3)$$

を満足する正整数とする。このとき A' は時刻 $t = t_0 + l + T(n)$ 時に一斉射撃する。 $T(n)$ が最適時間計算量である時、すなわち

$T(n) = 2n - 2$ の時、条件 (3) は

$$t_1 + t_2 - 2t_0 \leq 2(n - 1) \quad (4)$$

となる。一斉射撃は $t = t_0 + l + 2n - 2$ ステップ時に起こる。時刻 $t = t_1, t_2$ において C_1 に与えられた信号は、セル空間を $1/1$ のスピードで右方向に伝わり、各セルは 2 つの信号が伝わる $2l$ ステップの間、2 ステップに 1 回の割合で状態遷移を繰り返す。したがってこの間の動作速度は $1/2$ になる。このような動作を実現するために各セルはこの間 1 ステップ前の状態も同時に保持しておく必要があり、そのため内部状態数は $O(k^2)$ となる。時刻 $t = t_1 + 1$ より $t = t_2 + n$ までのセル空間上の計算状況において、一部のセルの状態変化に時間的な”ずれ”が生じていることに注意する必要がある。図 2(a) は、 A' の動作を示した時間空間図式で、灰色の領域では動作速度が $1/2$ となり、一斉射撃に至る時間が全体で l ステップ遅延される様子を

示している. 図 3 は $n = 14, t_0 = 2, t_1 = 6, t_2 = 14$ の場合における A' の計算状況である.

[補題 2] は次のように一般化できる.

[補題 3] A を任意のセルラーオートマトンとする. t_1, t_2, l を次の条件を満足する正整数とする.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2l, l \geq 1, t_2 \geq t_1 \geq 0 \quad (5)$$

時刻 $t = t_1, t_2$ においてセル $C_s, 1 \leq s \leq n$ に特殊な状態をセットすることにより, A の動作を漸近的に l ステップ遅延させ, その計算状況を生産するセルラーオートマトン A'' が存在する. A の内部状態数を k とすると, A'' の内部状態数は $O(k^2)$ である.

次に A を時間計算量 $T(s, n)$ ステップで動作する一般化一斉射撃アルゴリズムを実行するセルラーオートマトンとする. A'' は時刻 $t = t_0$ に C_s に将軍状態をセットすると仮定する. また時刻 $t = t_1, t_2$ 時に先に説明した信号を C_s に与えるものとする. 但し, t_0, t_1, t_2, l は次の条件を満足するものとする.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2l, t_2 \geq t_1 \geq t_0 \geq t, l \geq 1, \quad (6)$$

$$t_1 + t_2 - 2t_0 \leq 2T(s, n) - 2 + \max(s, n - s + 1) + 2. \quad (7)$$

このとき A'' は時刻 $t = t_0 + l + T(s, n)$ 時に一斉射撃する. 時間計算量 $T(s, n)$ が最適時間である場合, すなわち $T(s, n) = n - 2 + \max(s, n - s + 1)$ となる時, 上式 (7) は

$$t_1 + t_2 - 2t_0 \leq 2(n - 1) \quad (8)$$

となり, 一斉射撃は時刻 $t = t_0 + l + n - 2 + \max(s, n - s + 1)$ に生起する.

図 2(b) に A'' の動作を示し, 図 4 に $n = 14, s = 6, t_0 = 2, t_1 = 6, t_2 = 14$ の場合における状態変化の様子を示す. [補題 3] は次に示す 2 次元アレイの各行及び, 各列方向での一斉射撃に利用される.

サイズ $m \times n$ の 2 次元セルアレイ M を考える. 一般性を失うことなく, 以下では次のことを仮定する. (1) $m \leq n$, (2) $1 \leq r \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil, 1 \leq s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

ここで, (r, s) は $t = 0$ 時における M の将軍位置である. M は自身のサイズ $m \times n$ の 2 次元アレイを m 個の長さ n の 1 次元アレイから構成されると考え, それぞれの行上で 1 次元最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムを実行する. 各行上での一斉射撃を同時に行うために, [補題 2] に示した遅延技法を用いる. $t = 0$ 時にセル $C_{r,s}$ は s 列上を上方向並びに下方向にスピード $1/1$ で伝わる信号を生成する. この信号は s 列上を $C_{1,s}$ 及び $C_{m,s}$ をめざして s 列上を進み, $C_{1,s}, C_{m,s}$ に到達すると直ちに反射し, 同じ s 列上を $C_{r,s}$ に向かって $1/1$ で進む. 先に $C_{r,s}$ に到着した信号は, 再度そこで反射する. 後ほど $C_{r,s}$ に到着した信号は, その事実を $C_{r,s}$ で知り, $C_{r,s}$ で停止せず同じスピードで進み続ける. 両信号とも $C_{1,s}$ あるいは, $C_{m,s}$ で停止する. 同時に $C_{r,s}$ 上で出会った場合は, $C_{r,s}$ で停止する. 図 5 は, $1 \leq r \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$ の場合に, 上記の信号が伝わる様子を示した時間空間図式である. 例えば, 第 y ($r \leq y \leq m$) 上では, $t_0 = t_1 = y - t_2 = 2m - y - r - 4$ 時に $C_{y,s}$ に信号が与えられ, y 行上での一斉射撃がこれらの信号により全体として, $y - m$ ステップ遅延される様子を示している. 第 x ($1 < x < r$) 行では, 2 回の遅延動作が行われることが図 5 より明らかである.

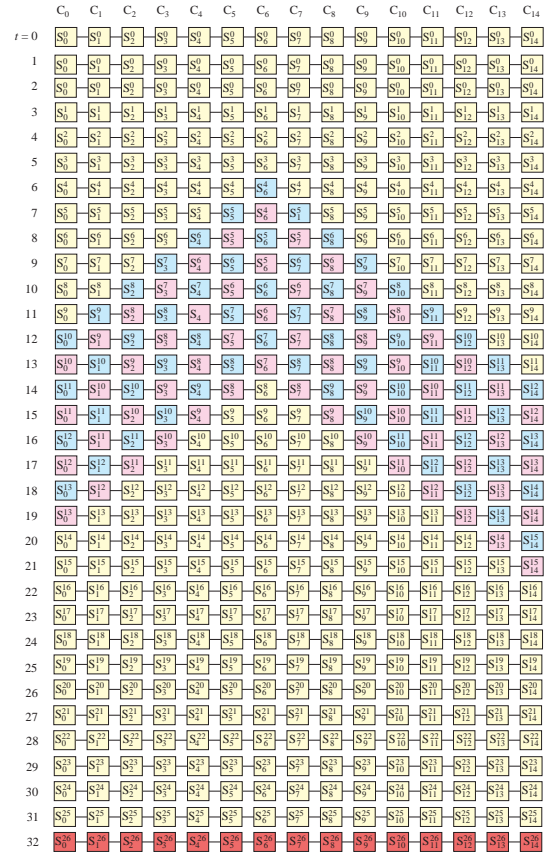


図 4: A'' 空間状態遷移図

[補題 4] 第 x 行は時刻 $t_{fx} = m + 2n - r - s - 1$ 時に一斉射撃する. ここで, x は $1 \leq x \leq r$ なる任意の正整数である.

(略証) 第 x 行は時刻 $t = t_0 = r - x$ 時に一斉射撃が開始される. $2l_1 = 2(x - 1), 2l_2 = 2(m - 2r + 1)$ ステップの間, スピード $1/2$ で動作が進行する. 従って, $l = l_1 + l_2 = m - 2r + x$ が成り立つ. [補題 3] より

$$\begin{aligned} t_{fx} &= t_0 + l + n - 2 + \max(s, n - s + 1) \\ &= m + n - r - 2 + \max(s, n - s + 1) \\ &= m + 2n - r - s - 1. \end{aligned}$$

また, $t_0 = r - x, t_1 = 3r - x - 2, t_2 = 2m - r - x$ より, $t_1 + t_2 - 2t_0 = 2(m - 1) \leq 2(n - 1)$. 従って, 条件 (8) を満足している.

[補題 5] 第 y 行は時刻 $t_{fy} = m + 2n - r - s - 1$ 時に一斉射撃する. ここで, y は $r \leq y \leq m$ なる任意の正整数である.

(略証) 第 y 行は, 時刻 $t = t_0 = y - r$ 時に一斉射撃が開始される. $2l = 2(m - y)$ ステップの間, スピード $1/2$ で動作が進行する. 従って, $l = m - y$. [補題 5] より,

$$\begin{aligned} t_{fy} &= t_0 + l + n - 2 + \max(s, n - s + 1) \\ &= m + n - r - 2 + \max(s, n - s + 1) \\ &= m + 2n - r - s - 1. \end{aligned}$$

さらに $t_0 = t_1 = y - r, t_2 = 2m - r - y$ より, $t_1 + t_2 - 2t_0 = 2m - 2y \leq 2(n - 1)$. 従って, 条件 (8) を満足している.

[補題 4,5] より, $m < n$ の場合, すべての行上での一斉射撃は同時に生起し, その時刻は $t_R = m + 2n - r - s - 1$ である. 一方, 列方向での一斉射撃では, すべてのセルは同時に射撃状態を取らず, 同期は実現しない. 射撃状態の出現は時刻

参考文献

[1] R. Balzer: An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 10(1967), pp. 22-42.
 [2] W. T. Beyer: Recognition of topological invariants by iterative arrays. Ph.D. Thesis, MIT, (1969), pp. 144.
 [3] A. Grasselli: Synchronization of cellular arrays: The firing squad problem in two dimensions. *Information and Control*, vol. 28(1975), pp. 113-124.
 [4] K. Kobayashi: The firing squad synchronization problem for two-dimensional arrays. *Information and Control*, vol. 34(1977), pp. 177-197.
 [5] 前田, 梅尾: 2次元セルオートマトン上での一斉射撃アルゴリズム. 情報処理学会アルゴリズム研究会, 第81回アルゴリズム研究会, 81-1, pp. 1-8, (2001).
 [6] 前田, 道坂, 梅尾: 2次元一斉射撃アルゴリズムのための新しい設計手法. 電子情報通信学会コンピュータセッション研究会, COMP2001-97, pp.33-40, (2002).
 [7] J. Mazoyer: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, vol. 50(1987), pp. 183-238.
 [8] M. Minsky: *Computation: Finite and infinite machines*. Prentice Hall, (1967), pp. 28-29.
 [9] E. F. Moore: The firing squad synchronization problem. in *Sequential Machines, Selected Papers* (E. F. Moore ed.), Addison-Wesley, Reading MA., (1964), pp. 213-214.
 [10] F. R. Moore and G. G. Langdon: A generalized firing squad problem. *Information and Control*, vol. 12(1968), pp. 212-220.
 [11] H. B. Nguyen and V. C. Hamacher: Pattern synchronization in two-dimensional cellular space. *Information and Control*, vol. 26(1974), pp. 12-23.
 [12] A. Settle and J. Simon: Smaller solutions for the firing squad. *Theoretical Computer Science*, vol. 276(2002), pp.83-109.
 [13] I. Shinahr: Two- and three-dimensional firing squad synchronization problems. *Information and Control*, vol. 24(1974), pp. 163-180.
 [14] H. Szwerinski: Time-optimum solution of the firing-squad-synchronization-problem for n -dimensional rectangles with the general at an arbitrary position. *Theoretical Computer Science*, vol. 19(1982), pp. 305-320.
 [15] 寺岡, 久岡, 前田, 梅尾: 2次元セルオートマトン上での最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムの設計. 電子情報通信学会総合大会, D-1-10, pp.10[2004]
 [16] H. Umeo, M. Maeda and N. Fujiwara: An efficient mapping scheme for embedding any one-dimensional firing squad synchronization algorithm onto two-dimensional arrays. *Proc. of the 5th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, LNCS 2493, Springer-Verlag, pp.69-81(2002).
 [17] H. Umeo, M. Hisaoka, K. Michisaka, K. Nishioka and M. Maeda: Some generalized synchronization algorithms and their implementations for a large scale cellular automata. *Proc. of the Third International Conference on Unconventional Models of Computation, UMC 2002*, LNCS 2509, Springer-Verlag, pp.276-286(2002).
 [18] V. I. Varshavsky: Synchronization of a collection of automata with random pairwise interaction. *Autom. and Remote Control*, vol. 29(1969), pp. 224-228.
 [19] V. I. Varshavsky, V. B. Marakhovsky and V. A. Peschansky: Synchronization of interacting automata. *Mathematical Systems Theory*, Vol. 4, No. 3(1970), pp. 212-230.
 [20] A. Waksman: An optimum solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 9(1966), pp. 66-78.

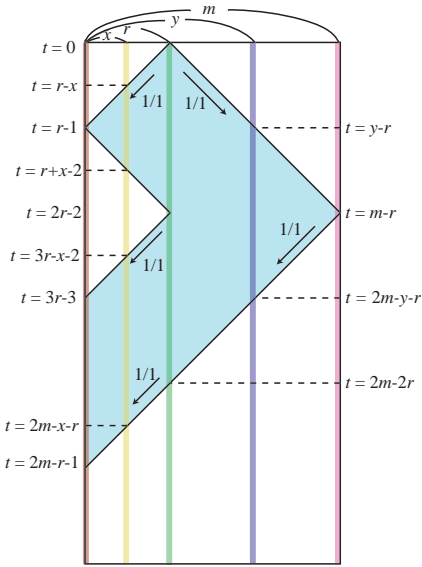


図 5: 制御レイヤの遅延効果の範囲を示す時間空間図式

$t_c = m + 2n - r - s - 1$ までにすべてのセル上で終了する。したがって、各セル上で $t_c < t_r$ が成立し、第 2 回目の射撃をアレイ全体の一斉射撃とする。図 6 に $m \leq n$ の場合における方向の一斉射撃の様子を示す。以上を次の定理にまとめる。

[定理 6] サイズ $m \times n$ の 2 次元セル空間において、将軍位置を (r, s) とするとき、 $m + n + \max(m, n) - \min(r, m - r + 1) - \min(s, n - s + 1) - 1$ ステップの最適時間でセル空間全体を一斉射撃状態に導くアルゴリズムが存在する。ここで (r, s) は、 $1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$ の任意の正整数である。

4. おわりに

Szwerinski [14] とは異なる制御手法を用いた最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムを提案した。今後の課題として計算機上での実装が残される。

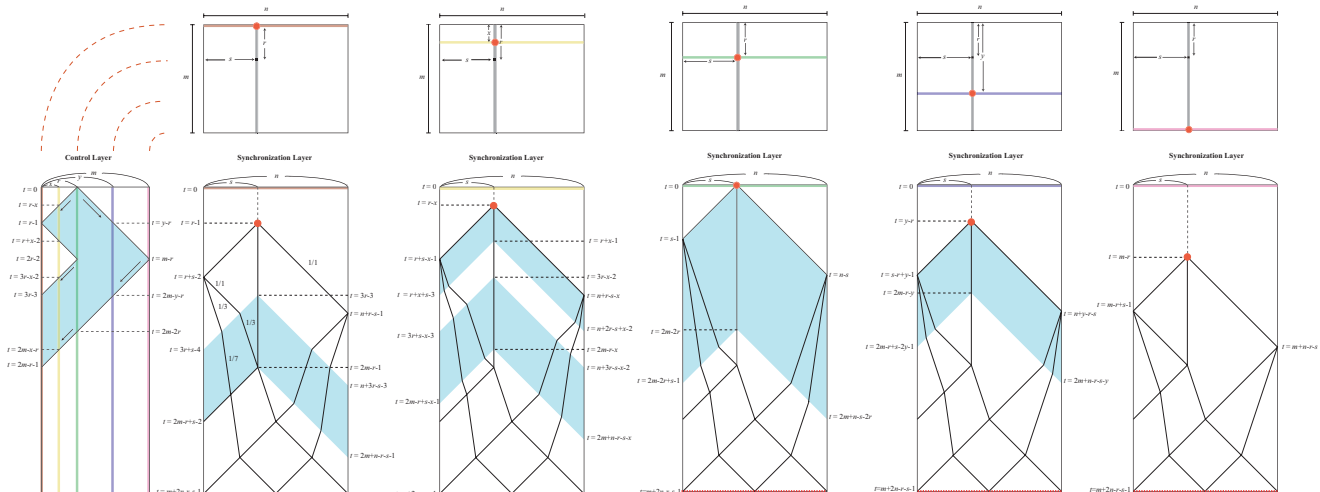


図 6: $m < n$ における 2 次元セル空間の時間空間図式